

государственное общеобразовательное учреждение Ярославской области
«Лицей №86»

**Методы решения заданий с параметрами. Пособие для
старшеклассников по подготовке к ЕГЭ по профильной
математике. Свойства функции**

Авторы:

Иванов Максим Артемович,
ученик 11 «А» «Инженерного
ЯНОС-класса» ГОУ ЯО «Лицей №
86»

Медведев Тимофей Максимович,
ученик 11 «А» «Инженерного
ЯНОС-класса» ГОУ ЯО «Лицей №
86»

Ярославль 2024

Задачи с параметром допускают весьма разнообразные способы решения. Наиболее распространенными из них являются:

- алгебраический способ решения;
- способ решения, основанный на построении и исследовании геометрической модели данной задачи;
- функциональный способ, в котором базовым является исследование некоторой функции.

Рассмотрим функциональный метод решения задач с параметром, то есть метод решения, при котором используются свойства функций.

Классификация задач, решаемых функциональными методами

1. Задачи, в условиях которых непосредственно требуется исследовать свойства функции $y=f(x,a)$ (область определения, монотонность и т.д.) в зависимости от значений параметра a , принимающего допустимые числовые значения.

2. Задачи, в которых формулировки свойств функции в точке или на промежутке позволяют рассматривать параметр не только в формуле, но и при задании области существования функции.

3. Задачи, связанные с постановкой дополнительных условий на свойства функции (количество нулей функции, ограничение на наибольшее значение функции и т.д.).

4. Задачи, решение которых опирается на определение свойства функции (непрерывность, дифференцируемость, экстремум...). Подобные задачи можно переформулировать и свести к уравнению, неравенству или системе уравнений (неравенств), для решения которых используют аналитический или функционально-графический способы (графическую интерпретацию).

Наиболее часто используются следующие свойства функций:

- свойства ограниченности области определения или области значения функции (*методы оценки и минимакса*);
- свойства четности и нечетности входящих в уравнение или неравенство функций;
- кусочная монотонность большинства алгебраических и элементарных трансцендентных функций входящих в уравнение или неравенство;
- периодичность функций и др.

При исследовании области значений функции полезно знать области значений некоторых, наиболее часто встречающихся, функций:

№	Функция	Область значений
1	$f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$	$[\frac{4ac - b^2}{4a}; +\infty)$
2	$f(x) = x + \frac{1}{x}$	$(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$
3	$f(x) = ax + \frac{b}{x}, a > 0, b > 0$	$[2\sqrt{ab}; +\infty)$
4	$f(x) = a \sin x + b \cos x$	$[-\sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 + b^2}]$

Использование ограниченности функций. Минимаксные задачи

Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ на $D(f) \cap D(g)$ выполняются неравенства $f(x) \geq A, g(x) \leq A$ и требуется решить уравнение $f(x) = g(x)$. Тогда $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

Наиболее часто этот метод применяют при решении уравнений и неравенств, если в правой и левой частях стоят функции разного типа.

1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2 + 9|x - 3| + 3\sqrt{x^2 - 6x + 13} = 4a + 2|x - 2a - 3|$ имеет хотя бы один корень.

Решение:

Запишем уравнение в виде $3\sqrt{x^2 - 6x + 13} = 4a + 2|x - 2a - 3| - a^2 - 9|x - 3|$.

Введем функции $f(x) = 3\sqrt{x^2 - 6x + 13}$ и $g(x) = 4a + 2|x - 2a - 3| - a^2 - 9|x - 3|$

$$f(x) = 3\sqrt{x^2 - 6x + 13} = 3\sqrt{(x - 3)^2 + 4} \geq 6; D(f) = R; E(f) = [6; +\infty);$$

$$\min f(x) = f(3) = 6$$

Зададим функцию $g(x) = 4a + 2|x - 2a - 3| - a^2 - 9|x - 3|$ кусочно.

$$g(x) = \begin{cases} 4a + 2(x - 2a - 3) - a^2 - 9(x - 3), & x \geq 3 \\ 4a + 2(-x - 2a - 3) - a^2 - 9(3 - x), & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} (-9 + 2)x - a^2 + 2(-2a - 3) + 27, & x \geq 3 \\ (9 + 2)x - a^2 + 2(-2a - 3) - 27, & x < 3 \end{cases}$$

$D(g) = R, g(x)$ возрастает на $(-\infty; 3]$ и убывает на $[3; +\infty)$

$$\max g(x) = g(3) = 4a + 4|a| - a^2$$

Уравнение $f(x) = g(x)$ имеет решение только в случае $f(3) = g(3) = 6$

Таким образом, исходное уравнение свели к решению уравнения $4a + 4|a| - a^2 = 6$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a \geq 0 \\ a^2 - 8a + 6 = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ a^2 + 6 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. . \text{ Тогда } a = 4 \pm \sqrt{10}.$$

Ответ: при $a = 4 \pm \sqrt{10}$ уравнение имеет хотя бы один корень.

2. При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases} x^2 + px + 2 = 0 \\ \sin^2 \pi p + \sin^2 \pi x + 2^{|y|} = \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| \end{cases} \quad \text{имеет решения?}$$

Решение:

$$\begin{cases} x^2 + px + 2 = 0 & (1) \\ \sin^2 \pi p + \sin^2 \pi x + 2^{|y|} = \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| & (2) \end{cases}$$

Уравнение (2) определено при любых значениях переменных x и y . В силу четных степеней слагаемых и присутствующих модулей, предполагаем, что решение связано с ограниченностью и возможно использование метода минимаксов.

$$\sin^2 \pi p \geq 0; \quad \sin^2 \pi x \geq 0; \quad 2^{|y|} \geq 1. \quad \text{Поэтому } \sin^2 \pi p + \sin^2 \pi x + 2^{|y|} \geq 1$$

$$\left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| \leq 1.$$

Уравнение имеет решение при выполнении условий

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \pi p = 0; \\ \sin^2 \pi x = 0; \\ 2^{|y|} = 1 \\ \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = n, n \in \mathbb{Z} \\ x = m, m \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \\ x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Таким образом, значение переменной y может быть только нулевым, параметр и переменная может принимать только целые значения, а переменная x только целые нечетные значения. Тогда, уравнение(1) – это уравнение с целыми корнями и целыми коэффициентами. По обратной теореме Виета имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}$$

Нечетный делитель числа 2 - это 1 или -1.

Возможны варианты: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ p = -3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \\ p = 3 \end{cases}$

Таким образом система имеет решение при $p=3$ и $p=-3$.

Ответ: -3; 3.

Использование четности и нечетности функций

Утверждения об инвариантности (условие не меняется при преобразовании) выражений

Утверждение 1. Если выражение $f(x)$ инвариантно относительно преобразования $x \rightarrow (-x)$ и уравнение $f(x) = 0$ имеет корень x_0 , то число $-x_0$ — также корень этого уравнения.

Утверждение 2. Если выражение $F(x; y)$ инвариантно относительно преобразования $x \rightarrow (-x)$ и уравнение $F(x; y) = 0$ имеет решение $(x_0; y_0)$, то и пара чисел $(-x_0; y_0)$ — также решение этого уравнения.

Утверждение 3. Если выражение $F(x; y)$ инвариантно относительно преобразования $y \rightarrow (-y)$ и уравнение $F(x; y) = 0$ имеет решение $(x_0; y_0)$, то и пара чисел $(x_0; -y_0)$ — также решение этого уравнения.

Утверждение 4. Если выражение $F(x; y)$ инвариантно относительно преобразования $x \rightarrow y$ и $y \rightarrow x$ и уравнение $F(x; y) = 0$ имеет решение $(x_0; y_0)$, то пара чисел $(y_0; x_0)$ — также решение этого уравнения.

Утверждение 5. Если выражение $f(x)$ инвариантно относительно преобразования $x \rightarrow g(x)$ и уравнение $f(x) = 0$ имеет корень x_0 , то число $g(x_0)$ — также корень этого уравнения.

3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + (1 - a)^2 = |x - 1 + a| + |x - a + 1|$ имеет единственный корень.

Решение:

Заметим, что если x является решением уравнения, то $-x$ также является решением заданного уравнения. Для того, чтобы уравнение имело единственный корень, необходимо наличие нулевого решения. Подставим значение $x=0$ в уравнение.

$$(1 - a)^2 = |-1 + a| + |-a + 1| \Leftrightarrow (a - 1)^2 = 2|a - 1| \Leftrightarrow > |a - 1| \cdot (|a - 1| - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |a - 1| = 0 \\ |a - 1| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

Проверим при найденных значениях параметра наличие корней, отличных от нулевого решения.

При $a=0$ получим уравнение $x^2 + 1 = |x - 1| + |x + 1|$. Помимо нулевого решения его корнями будет 1 и -1, то есть решение не единственное.

При $a=3$ получим уравнение $x^2 + 4 = |x + 2| + |x - 2|$, решая которое убеждаемся в единственности нулевого решения.

При $a=-1$ получим уравнение $x^2 + 4 = |x + 2| + |x - 2|$, которое решено в предыдущем пункте.

Вывод: исходное уравнение имеет единственное решение при $a=3$ и $a=-1$

Ответ: -1; 3

4. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \sqrt{|y+3|} = 1 - \sqrt{5|x|}, \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2 \end{cases} \quad \text{имеет четыре решения?}$$

Решение:

Введем замену переменных: $\sqrt{|y+3|} = u, u \geq 0; \sqrt{5|x|} = v, v \geq 0$.

Если $u < 0$ или $v < 0$ система не будет иметь решений.

Каждому значению $u > 0$ соответствует два значения переменной y и каждому значению $v > 0$ соответствует два значения переменной x .

Каждому значению $u = 0$ соответствует одно значение переменной y и каждому значению $v = 0$ соответствует одно значение переменной x .

Каждой паре положительных значений $(u; v)$ соответствует четыре пары значений $(x; y)$.

Чтобы исходная система имела четыре решения, система уравнений в новых обозначениях должна иметь одну пару решений.

После замены система примет вид:
$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^4 + v^4 = 16a \end{cases}$$

Если пара $(u; v)$ является решением системы, то пара $(v; u)$ также является решением системы, т.е. решений две пары. Значит должно быть совпадение решений. Рассмотрим варианты совпадений.

1 случай: $u=v$

$$\begin{cases} u = v \\ 2u = 1 \\ 2u^4 = 16a \\ u \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 0,5 \\ a = \frac{1}{128} \end{cases}$$

Проверим, что при найденном значении параметра других решений нет.

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^4 + v^4 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Решим систему методом подстановки.

$$\begin{cases} v = 1 - u \\ 8u^4 + 8(1 - u)^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u \\ 16u^4 - 32u^3 + 48u^2 - 32u + 7 = 0 \end{cases}$$

Используя схему Горнера, получим разложение на множители во втором уравнении системы. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} v = 1 - u \\ (2u - 1)^2(4u^2 - 4u + 7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Других решений система не имеет. Следовательно, исходная система имеет четыре пары решений при $a = \frac{1}{128}$.

2 случай: пусть $u = 0, v > 0$ и пара $(0, v)$ – решение системы. Тогда пара $(v, 0)$ – решение системы, то есть решений две пары. Исходная система, в этом случае, имеет четыре пары решений: $(x;0), (-x;0), (0;x), (0;-x)$.

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^4 + v^4 = 16a \\ u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 \\ u = 0 \\ a = \frac{1}{16} \end{cases}$$

Проверим, нет ли других решений при найденном значении параметра.

$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^4 + v^4 = 1 \end{cases}$. Решая систему методом подстановки и используя схему

Горнера, приведем систему к виду: $\begin{cases} v = 1 - u \\ u(u - 1)(u^2 - u + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \\ u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$

При найденном значении параметра получим две пары $(0;1)$ и $(1;0)$. Следовательно, исходная система имеет четыре пары решений при $a = \frac{1}{16}$.

3 случай: $v=0, u=1, a = \frac{1}{16}$. При значении параметра $a = \frac{1}{16}$ задача уже решена.

Таким образом, исходная система имеет четыре пары решений при $a = \frac{1}{16}$ и $a = \frac{1}{128}$.

Использование монотонности при применении функционального метода решения задач с параметром

Перед решением задач с параметром с использованием монотонности функций было бы полезно повторить определение и свойства монотонных функций, связь монотонности и дифференцируемости.

5. Найдите все значения параметра при которых уравнение $64x^6 - (3x + a)^3 + 4x^2 - 3x = a$ имеет более одного корня.

Решение:

Приведем уравнение к виду $64x^6 - 4x^2 + 3x = (3x + a)^3 + (3x + a)$.

Рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + t$. Функция определена на множестве всех действительных чисел и возрастает, как сумма возрастающих элементарных функций на этом множестве. Следовательно, каждое свое значение функция принимает лишь один раз, то есть равным значениям аргумента соответствуют равные значения функции:

$$f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2$$

Поэтому уравнение $64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + (3x + a)$ равносильно уравнению $x^2 = 3x + a$, которое имеет более одного решения в случае положительного дискриминанта.

$$D = 9 + 16a > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{9}{16}$$

Ответ. При $a > -\frac{9}{16}$ уравнение имеет более одного корня.

6. Найдите все значения параметра при которых уравнение

$$(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = a^2 - 14a \quad \text{имеет хотя бы одно решение.}$$

Решение:

Введем замену: $t = \sqrt{4x - x^2} = \sqrt{4 - 4 + 4x - x^2} = \sqrt{4 - (x - 2)^2}, t \in [0; 2]$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^4 - 32t - a^2 + 14a$. Функция непрерывна на $[0; 2]$ и дифференцируема на $(0; 2)$. $f'(t) = 4t^3 - 32 = 4(t^3 - 8) < 0$ на $(0; 2)$ и $f(t)$ убывает на $[0; 2]$. $E(t) = [f(2); f(0)]$.

Значит на отрезке $[0; 2]$ уравнение будет иметь не более одного корня. Корень уравнения существует только при одновременном выполнении двух условий: $f(0) \geq 0, f(2) \leq 0$.

$$\text{То есть } \begin{cases} -a^2 + 14a \geq 0 \\ -a^2 + 14a - 48 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 14a \leq 0 \\ a^2 - 14a + 48 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 14 \\ 8 \leq a \leq 14 \end{cases}.$$

Ответ: уравнение имеет хотя бы одно решение при $a \in [0; 6] \cup [8; 14]$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 9|x - 3| + 3\sqrt{x^2 - 6x + 13} = 4a + 2|x - 2a - 3|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Произведём замену переменной $t = x - 3$, получим:

$$a^2 + 9|t| + 3\sqrt{t^2 + 4} = 4a + 2|t - 2a| \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3\sqrt{t^2 + 4} = 2|t - 2a| - 9|t|.$$

Пусть теперь

$$f(t) = a^2 - 4a + 3\sqrt{t^2 + 4},$$

$$g(t) = 2|t - 2a| - 9|t|.$$

При $t \geq 0$ функция $g(t)$ убывает, принимая все значения от $g(0)$ до $-\infty$. При $t < 0$ функция $g(t)$ — возрастает, принимая все значения от $-\infty$ до $g(0)$. Значит, $\max g(t) = g(0) = 4|a|$

Функция $f(t)$ принимает минимальное значение при $f(t) = f(0) = a^2 - 4a + 6$, причём на промежутке $(0; +\infty)$ — функция возрастает, принимая все значения от $f(0)$ до $+\infty$, а на промежутке $(-\infty; 0)$ — убывает (функция чётная), принимая все значения от $+\infty$ до $f(0)$.

Поскольку наибольшее значение функции $g(t)$ и наименьшее значение функции $f(t)$ достигается при одном и том же значении $t = 0$, уравнение будет иметь решение тогда и только тогда, когда $\max g(t) \geq \min f(t)$, то есть

$$a^2 - 4a + 6 \leq 4|a|$$

1) При $a \geq 0$ получаем

$$a^2 - 4a + 6 \leq 4a \Leftrightarrow a^2 - 8a + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{10} \leq a \leq 4 + \sqrt{10}$$

2) При $a < 0$ получаем

$$a^2 - 4a + 6 \leq -4a \Leftrightarrow a^2 + 6 < 0, \text{ решений нет.}$$

Ответ: $a \in [4 - \sqrt{10}; 4 + \sqrt{10}]$.

2. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 13|x| + 5\sqrt{4x^2 + 9} = 3a + 3|4x - 3a|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Разберем случаи раскрытия модулей.

1) $x \geq 0, x \geq \frac{3a}{4}$. Тогда уравнение примет вид $a^2 + 6a + x + 5\sqrt{4x^2 + 9} = 0$, что невозможно поскольку

$$a^2 + 6a \geq -9, \sqrt{4x^2 + 9} \geq 3$$

2) $x \geq 0, x < \frac{3a}{4}$. Тогда уравнение примет вид $a^2 - 12a + 25x + 5\sqrt{4x^2 + 9} = 0$.

Заметим, что левая часть — возрастающая функция $f(x)$, необходимо и

достаточно, чтобы $f(0) \leq 0, f\left(\frac{3a}{4}\right) > 0$.

Первое условие дает $a \in [6 - \sqrt{21}; 6 + \sqrt{21}]$.

Второе — $a^2 + \frac{27a}{4} + 5\sqrt{9 + \frac{9a^2}{4}} > 0$, что верно при всех неотрицательных a .

3) $x < 0, x \geq \frac{3a}{4}$. Тогда уравнение примет вид $a^2 + 6a - 25x + 5\sqrt{4x^2 + 9} = 0$, что невозможно поскольку

$$a^2 + 6a \geq -9, \sqrt{4x^2 + 9} \geq 3.$$

4) $x < 0, x < \frac{3a}{4}$. Тогда уравнение примет вид $a^2 - 12a - x + 5\sqrt{4x^2 + 9} = 0$.

Заметим, что левая часть — убывающая функция $f(x)$, причем

$f(-36) = (a - 6)^2 + 5\sqrt{4 \cdot 36^2 + 9} > 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$f(0) < 0$ или $f\left(\frac{3a}{4}\right) < 0$, в зависимости от того, какое из чисел 0 или $\frac{3a}{4}$ меньше.

Если $a = 0$ и эти числа равны, получаем функцию $-x + 5\sqrt{4x^2 + 9} = 0$, положительную на левой полуоси.

Если $a > 0$, то можно рассматривать любые $x < 0$ и поэтому нужно чтобы $f(0) < 0$, то есть $a^2 - 12a + 15 < 0$. Однако такие a уже рассматривались и для них корень есть.

Если $a < 0$, то можно рассматривать только $x < \frac{3a}{4}$ и поэтому нужно чтобы $f\left(\frac{3a}{4}\right) < 0$, то есть $a^2 - \frac{51a}{4} + 5\sqrt{9 + \frac{9a^2}{4}} < 0$, что очевидно невозможно при отрицательных a .

Ответ: $a \in [6 - \sqrt{21}; 6 + \sqrt{21}]$.

3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$64x^6 - (3x + a)^3 + 4x^2 - 3x = a$$

имеет более одного корня.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + (3x + a).$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + t$. Она монотонно возрастает как сумма двух возрастающих функций. Поэтому уравнение $f(4x^2) = f(3x + a)$ равносильно уравнению $4x^2 = 3x + a$. Оно имеет более одного корня в тех случаях, когда дискриминант уравнения $4x^2 - 3x - a = 0$ положителен. То есть когда $9 + 16a > 0$, $a > -\frac{9}{16}$.

Ответ: $a > -\frac{9}{16}$.

4. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^6 + (5a - 8x)^3 + 3x^2 + 15a = 24x$$

не имеет корней.

Решение. Преобразуем уравнение

$$x^6 + 3x^2 = (8x - 5a)^3 + 3(8x - 5a).$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + 3t$. Она монотонно возрастает как сумма двух возрастающих функций. Поэтому уравнение $f(x^2) = f(8x - 5a)$ равносильно уравнению $x^2 = 8x - 5a$. Оно не имеет корней в тех случаях,

когда дискриминант уравнения $x^2 - 8x + 5a = 0$ отрицателен. То есть когда $64 - 20a < 0, a > \frac{16}{5}$.

Ответ: $a > \frac{16}{5}$.

5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (4a - 2x)^3 + 6x^2 + 8a = 4x$$

не имеет корней.

Решение. Преобразуем уравнение

$$27x^6 + 6x^2 = (2x - 4a)^3 + 2(2x - 4a).$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + 2t$. Она монотонно возрастает как сумма двух возрастающих функций. Поэтому уравнение $f(3x^2) = f(2x - 4a)$ равносильно уравнению $3x^2 = 2x - 4a$. Оно не имеет корней в тех случаях, когда дискриминант уравнения $3x^2 - 2x + 4a = 0$ отрицателен. То есть когда $4 - 48a < 0, a > \frac{1}{12}$.

Ответ: $a > \frac{1}{12}$.

6. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y , удовлетворяющих неравенству

$$5|x - 2| + 3|x + a| \leq \sqrt{4 - y^2} + 7.$$

Решение. Рассмотрим две функции: $f(x) = 5|x - 2| + 3|x + a|$ и $g(y) = \sqrt{4 - y^2} + 7$.

Функция $f(x) = 5|x - 2| + 3|x + a|$ является кусочно-линейной, причём при $x < 2$ угловой коэффициент равен либо -2 , либо -8 , а при $x > 2$ угловой коэффициент равен либо 2 , либо 8 . Значит, функция $f(x)$ убывает при $x < 2$ и возрастает при $x > 2$, поэтому $f(x) \geq f(2) = 3|a + 2|$.

Поскольку $y^2 \geq 0$, получаем: $g(y) \leq g(0) = 9$.

Если $f(2) > g(0)$, то $f(x) \geq f(2) > g(0) \geq g(y)$, поэтому неравенство $f(x) \leq g(y)$ не имеет решений.

Если $f(2) \leq g(0)$, то пара чисел $x = 2$, $y = 0$ удовлетворяет неравенству $f(x) \leq g(y)$. Получаем:

$$f(2) \leq g(0) \Leftrightarrow 3|a+2| \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq a+2 \leq 3 \Leftrightarrow -5 \leq a \leq 1.$$

Ответ: $[-5; 1]$.

7. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $|x^2 - 4x + a| \leq 10$ выполняется для всех $x \in [a, a+5]$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 4x + a = (x-2)^2 + a - 4$. Эта функция возрастает на промежутке $[2, +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty, 2]$.

Исходное неравенство имеет вид $|f(x)| \leq 10$, значит, график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, a+5]$ должен находиться в пределах горизонтальной полосы: $-10 \leq f(x) \leq 10$.

Отрезок $[a, a+5]$ не должен лежать на участке монотонности функции $f(x)$, иначе приращение $f(x)$ на отрезке длины 5 будет не меньше 25, поэтому ее график не поместится в полосу ширины 20. Следовательно, $a < 2 < a+5$, откуда $-3 < a < 2$.

Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, a+5]$ достигается либо при $x = a$, либо при $x = a+5$.

Наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, a+5]$ достигается при $x = 2$. Получаем систему:

$$\begin{cases} -3 < a < 2, \\ f(a) \leq 10, \\ f(a+5) \leq 10, \\ f(2) \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 2, \\ (a-2)^2 + a - 4 \leq 10, \\ (a+3)^2 + a - 4 \leq 10, \\ a - 4 \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 2, \\ a^2 - 3a - 10 \leq 0, \\ a^2 + 7a - 5 \leq 0, \\ a \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 2, \\ -2 \leq a \leq 5, \\ \frac{-7 - \sqrt{69}}{2} \leq a \leq \frac{-7 + \sqrt{69}}{2}, \\ a \geq -6, \end{cases}$$

$$\text{откуда} \quad -2 \leq a \leq \frac{-7 + \sqrt{69}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } -2 \leq a \leq \frac{-7 + \sqrt{69}}{2}.$$

8. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sin(x + 4a) + \sin\left(\frac{x^2 - 6x - 7a}{2}\right) = 4x - x^2 - a$$

не имеет действительных решений.

Решение. Пусть $y = \frac{x^2 - 6x - 7a}{2}$, тогда $x^2 = 2y + 6x + 7a$, и уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \sin(x + 4a) + \sin y &= 4x - (2y + 6x + 7a) - a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2y + \sin y &= 2(-4a - x) + \sin(-x - 4a). \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение имеет вид $f(y) = f(-4a - x)$ для $f(t) = 2t + \sin t$.

Производная $f'(t) = 2 + \cos t$ положительна при всех t , поэтому функция $f(t)$ возрастает на всей числовой прямой. Тогда уравнение $f(-4a - x) = f(y)$ равносильно уравнению $-4a - x = y$.

Вернемся к исходной переменной:

$$-4a - x = \frac{x^2 - 6x - 7a}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow -8a - 2x = x^2 - 6x - 7a \Leftrightarrow x^2 - 4x + a = 0.$$

Полученное уравнение, а вместе с ним и исходное, не имеет действительных решений, если его дискриминант отрицателен, откуда $a > 4$.

Ответ: $a > 4$.

9. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sin(x - 3a) + \sin\left(\frac{x^2 - 6x + 7a}{2}\right) = 4x - x^2 - a$$

не имеет действительных решений.

Решение. Пусть $y = \frac{x^2 - 6x + 7a}{2}$. Тогда $x^2 = 2y + 6x - 7a$, и уравнение принимает вид

$$\sin(x - 3a) + \sin y = 4x - 2y - 6x + 6a \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2x - 6a + \sin(x - 3a) = -2y - \sin y.$$

Синус — нечётная функция, поэтому $2(3a - x) + \sin(3a - x) = 2y + \sin y$.
 Рассмотрим функцию $f(t) = 2t + \sin t$. Тогда уравнение принимает вид $f(3a - x) = f(y)$. Эта функция определена при всех t и её производная $f'(t) = 2 + \cos t$ положительна при всех t . Следовательно, функция $f(t)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой. Тогда уравнение $f(3a - x) = f(y)$ равносильно уравнению $3a - x = y$.

Сделаем обратную замену:

$$3a - x = \frac{x^2 - 6x + 7a}{2} \Leftrightarrow 6a - 2x = x^2 - 6x + 7a \Leftrightarrow x^2 - 4x + a = 0.$$

Уравнение не имеет действительных решений, если его дискриминант отрицателен: $4^2 - 4a < 0$, откуда $a > 4$.

Ответ: $a > 4$.

10. Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = a^2 - 14a$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Первый способ. Положим $\sqrt{4x - x^2} = t$, где $0 \leq t \leq 2$, так как $0 \leq 4x - x^2 \leq 4$.

Тогда, исходное уравнение принимает вид $t^4 - 32t = a^2 - 14a$. Найдем множество значений функции $f(t) = t^4 - 32t$ на отрезке $[0; 2]$. Так как $f'(t) = 4t^3 - 32 = 4(t^3 - 8) < 0$ на промежутке $[0; 2)$, то функция убывает на отрезке $[0; 2]$, и, следовательно, множество ее значений на отрезке $[0; 2]$ — отрезок $[f(2); f(0)]$, т. е. отрезок $[-48; 0]$. Таким образом, уравнение $f(t) = a^2 - 14a$ имеет решения тогда и только тогда, когда выполняются условия $-48 \leq a^2 - 14a \leq 0$.

$$\begin{cases} a^2 - 14a \leq 0, \\ a^2 - 14a + 48 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 14, \\ \begin{cases} a \leq 6, \\ a \geq 8 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 6, \\ 8 \leq a \leq 14. \end{cases}$$

Второй способ. Положим $\sqrt{4x - x^2} = t$, где $0 \leq t \leq 2$, так как $0 \leq 4x - x^2 \leq 4$, и рассмотрим функцию $f(t) = t^4 - 32t - a^2 + 14a$. Так как ее производная $f'(t) = 4t^3 - 32 = 4(t^3 - 8) < 0$ на промежутке $[0; 2)$, то функция убывает на отрезке $[0; 2]$, и, значит, имеет на нем не более одного корня. Этот корень есть

тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия $f(0) \geq 0$ и $f(2) \leq 0$.

Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} a^2 - 14a \leq 0, \\ a^2 - 14a + 48 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 14, \\ \begin{cases} a \leq 6, \\ a \geq 8 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 6, \\ 8 \leq a \leq 14. \end{cases}$$

Ответ: $0 \leq a \leq 6, 8 \leq a \leq 14$.

11. Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(1 + \sin x)^4 - 4 \sin x = 7 - a - a^2$ не имеет решений.

Решение.

$(1 + \sin x)^4 - 4(1 + \sin x) = 3 - a - a^2$ и положим $1 + \sin x = t$, где $0 \leq t \leq 2$. Тогда исходное уравнение принимает вид $t^4 - 4t = 3 - a - a^2$.

Найдем множество значений функции $f(t) = t^4 - 4t$ на отрезке $[0; 2]$.

Так как $f'(t) = 4t^3 - 4 = 4(t^3 - 1)$, то $f'(t) < 0$ на промежутке $[0; 1]$ и $f'(t) > 0$ на промежутке $(1; 2]$. Значит, функция убывает на отрезке $[0; 1]$ и возрастает на отрезке $[1; 2]$. Поскольку $f(0) < f(2)$, то множество значений функции на отрезке $[0; 2]$ — отрезок $[f(1); f(2)]$, т. е. отрезок $[-3; 8]$. Таким образом, уравнение $f(t) = 3 - a - a^2$ не имеет решений на отрезке $[0; 2]$ тогда и только тогда, когда выполняются условия $3 - a - a^2 > 8$ или $3 - a - a^2 < -3$.

$$\begin{cases} a^2 + a + 5 < 0, \\ a^2 + a - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -3, \\ a > 2. \end{cases}$$

12. При каких p данная система имеет решения:

$$\begin{cases} x^2 + px + 2 = 0, \\ \sin^2 \pi p + \sin^2 \pi x + 2^{|y|} = \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|? \end{cases}$$

Решение. Поскольку $\sin^2 \pi p \geq 0$ и $\sin^2 \pi x \geq 0$, $|y| \geq 0$, значит, $2^{|y|} \geq 1$, левая часть второго уравнения системы не меньше, чем 1. Так как его правая часть не больше 1, оно равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^2 \pi p = 0, \\ \sin^2 \pi x = 0, \\ 2^{|y|} = 1, \\ \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| = 1, \end{cases}$$

из которой находим, что $p \in \mathbb{Z}$, $x = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, $y = 0$.

Первое уравнение имеет целые коэффициенты и, чтобы исходная система имела решение, должна иметь целый корень $x_1 = 2k + 1$. Так как $x_1 + x_2 = -p$, x_2 — тоже целое число и из равенства $x_1 x_2 = 2$ получаем, что x_1 — нечетный делитель числа 2. Таким образом, он равен 1 или -1 .

При $x = 1$ находим $p = -3$, при $x = -1$ находим $p = 3$.

Ответ: система имеет решения при $p = \pm 3$.

13. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $a^2 - 7a + 7\sqrt{2x^2 + 49} = 3|x - 7a| - 6|x|$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Рассмотрим две функции: $f(x) = a^2 - 7a + 7\sqrt{2x^2 + 49}$ и $g(x) = 3|x - 7a| - 6|x|$. Поскольку $x^2 \geq 0$, получаем: $f(x) \geq f(0) = a^2 - 7a + 49$.

Функция $g(x) = 3|x - 7a| - 6|x|$ является кусочно-линейной, причём при $x < 0$ угловой коэффициент равен либо 3, либо 9, а при $x > 0$ угловой коэффициент равен либо -3 , либо -9 . Значит, функция $g(x)$ возрастает при $x < 0$ и убывает при $x > 0$, поэтому $g(x) \leq g(0) = 21|a|$.

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда $f(0) \leq g(0)$:

$$a^2 - 7a + 49 \leq 21|a| \Leftrightarrow a^2 - 7a - 21|a| + 49 \leq 0.$$

Значит, либо

$$\begin{cases} a^2 - 28a + 49 \leq 0, \\ a \geq 0, \end{cases} \quad \text{откуда } 14 - 7\sqrt{3} \leq a \leq 14 + 7\sqrt{3},$$

либо

$$\begin{cases} a^2 + 14a + 49 \leq 0, \\ a < 0, \end{cases} \quad \text{откуда } a = -7.$$

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень при $a = -7$ и при $14 - 7\sqrt{3} \leq a \leq 14 + 7\sqrt{3}$ и не имеет корней при других значениях a .

Ответ: $a \in \{-7\} \cup [14 - 7\sqrt{3}, 14 + 7\sqrt{3}]$.

14. Найдите все значения a , при которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3\log_2(3x - 1) + 2a = 0$$

принадлежит отрезку $[1; 3]$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3\log_2(3x - 1) + 2a$.

Она определена при $x > \frac{1}{3}$, возрастает на области определения и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Значит, уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение. Это решение принадлежит отрезку $[1; 3]$ тогда и только тогда, когда $f(1) \leq 0$ и $f(3) \geq 0$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 4 + 3 + 2a \leq 0, \\ 8 + 9 + 2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 7 \leq 0, \\ 2a + 17 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{17}{2} \leq a \leq -\frac{7}{2}.$$

Ответ: $\left[-\frac{17}{2}; -\frac{7}{2}\right]$.

15. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\sin^{14}x + (a - 3\sin x)^7 + \sin^2x + a = 3\sin x$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$\sin^{14}x + \sin^2x = (3\sin x - a)^7 + (3\sin x - a).$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^7 + t$, тогда исходное уравнение записывается в виде $f(\sin^2x) = f(3\sin x - a)$. Функция f возрастает, так как является суммой двух возрастающих функций. Монотонная функция принимает все свои значения единожды, поэтому получаем:

$$\sin^2x = 3\sin x - a \Leftrightarrow a = 3\sin x - \sin^2x.$$

Функция $y = \sin x$ принимает значения от -1 до 1 , а функция $z = 3y - y^2$ монотонно возрастает на отрезке $[-1, 1]$ и принимает на нём значения от -4 до 2 . Значит, уравнение $a = 3 \sin x - \sin^2 x$, а с ним и исходное уравнение имеют решение при $-4 \leq a \leq 2$.

Ответ: $[-4, 2]$.

16. Найдите все значения a , при которых неравенство

$$\log_a \left(\frac{3+2x^4}{1+x^4} \right) + \log_a \left(\frac{5+4x^4}{1+x^4} \right) > 1$$

выполняется для всех действительных значений x .

Решение. Заметим, что

$$\frac{3+2x^4}{1+x^4} = \frac{1+2(1+x^4)}{1+x^4} = \frac{1}{1+x^4} + 2,$$

$$\frac{5+4x^4}{1+x^4} = \frac{1}{1+x^4} + 4.$$

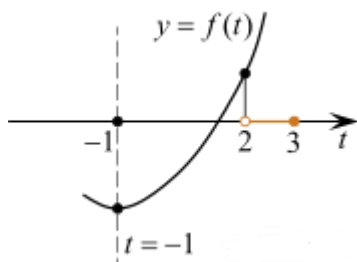
Пусть $t = \frac{1}{1+x^4} + 2$. Ввиду того, что $1 \leq 1+x^4 < +\infty$ множеством значений

выражения $\frac{1}{1+x^4} + 2$ при $x \in \mathbb{R}$ является промежуток $(2, 3]$. Значит,

неравенство $\log_a \left(\frac{3+2x^4}{1+x^4} \right) + \log_a \left(\frac{5+4x^4}{1+x^4} \right) > 1$ выполняется для всех действительных значений x тогда и только тогда, когда на промежутке $(2, 3]$ выполняется неравенство $\log_a t + \log_a(t+2) > 1$ (*).

Далее имеем:

1) если $0 < a < 1$, то неравенство (*) не имеет решений на промежутке $(2, 3]$, так как на этом промежутке оба слагаемых левой части неравенства отрицательны;



2) если $a > 1$, то неравенство (*) равносильно неравенству $t^2 + 2t - a > 0$.

Функция $f(t) = t^2 + 2t - a$ должна быть положительна на промежутке $(2, 3]$, значит, ее график должен быть расположен выше интервала $(2, 3]$ оси абсцисс, то есть, должно выполняться условие $f(2) \geq 0$ (см. рисунок). Решая неравенство $8 - a \geq 0$ с учетом условия $a > 1$, окончательно получаем $1 < a \leq 8$.

Ответ: $1 < a \leq 8$.

17. Найдите все значения параметра b , при каждом из которых уравнение $x^3 + 2x^2 - x \log_2(b - 1) + 4 = 0$

имеет единственное решение на отрезке $[-1; 2]$.

Решение. Пусть $\log_2(b - 1) = a$. Рассмотрим уравнение $x^3 + 2x^2 - ax + 4 = 0$. Число $x = 0$ не является корнем этого уравнения ни при каком значении параметра a . Поэтому это уравнение равносильно уравнению

$$a = x^2 + 2x + \frac{4}{x}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 2x + \frac{4}{x}$

и для уравнения $f(x) = a$ определим число корней и их расположение для каждого значения параметра a .

Найдём производную

$$f'(x) = 2x + 2 - \frac{4}{x^2} = \frac{2(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}{x^2}.$$

Отсюда следует, что на промежутках $(-\infty; 0)$, $(0; 1]$ функция убывает, а на промежутке $[1; +\infty)$ — возрастает. Следовательно, точка $x = 1$ — точка минимума, а минимум равен 7.

Заметим, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Из полученных свойств функции $f(x)$ следует, что при любом значении a данное уравнение имеет ровно один отрицательный корень, и поскольку $f(-1) = -5$, то при $a \leq -5$ уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[-1; 2]$; при $-5 < a < 7$ уравнение не имеет корней на $[-1; 2]$.

При $a = 7$ уравнение имеет единственный корень $x = 1$ на отрезке $[-1; 2]$.

Поскольку $f(2) = 10$, то при $7 < a \leq 10$ на отрезке $[-1; 2]$ уравнение имеет ровно два корня. При $a > 10$ уравнение также имеет единственный корень на отрезке $[-1; 2]$.

Решим два неравенства и уравнение:

$$\log_2(b-1) \leq -5; \quad \log_2(b-1) = 7; \quad \log_2(b-1) > 10.$$

Получим:

$$1 < b \leq \frac{33}{32}; \quad b = 129; \quad b > 1025.$$

$$\text{Ответ: } 1 < b \leq \frac{33}{32}; \quad b = 129; \quad b > 1025.$$

18. Найдите все значения параметра a , при которых для любого действительного x выполнено неравенство

$$|3 \sin x + a^2 - 22| + |7 \sin x + a + 12| \leq 11 \sin x + |a^2 + a - 20| + 11$$

Решение. Пусть $t = \sin x$, тогда неравенство запишется в виде

$$|3t + a^2 - 22| + |7t + a + 12| \leq 11t + |a^2 + a - 20| + 11.$$

Поскольку $-1 \leq \sin x \leq 1$, нам требуется найти все значения a , при которых неравенство выполнено при $-1 \leq t \leq 1$.

Рассмотрим функции $f(t) = |3t + a^2 - 22| + |7t + a + 12|$ и

$g(t) = 11t + |a^2 + a - 20| + 11$. Функция $f(t)$ — кусочно-линейная. Угловым коэффициентом её звеньев не превосходит 10. Функция $g(t)$ — линейная функция с угловым коэффициентом 11. Значит, функция $g(t) - f(t)$ возрастающая. Таким образом, если неравенство $f(t) \leq g(t)$ выполнено при $t = -1$, то оно выполнено при $t \geq -1$.

При $t = -1$ неравенство принимает вид

$$|a^2 - 25| + |a + 5| \leq |a^2 + a - 20| \Leftrightarrow |a + 5| \cdot (|a - 4| - |a - 5| - 1) \geq 0.$$

Выражение $|a + 5|$ равно нулю при $a = -5$ и больше нуля при других значениях a . Выражение $|a - 4| - |a - 5| - 1$ при $a \geq 5$ равно 0, при $4 < a < 5$ принимает вид $2a - 10$, при $a \leq 4$ равно -2 . Таким образом, неравенство $|a + 5| \cdot (|a - 4| - |a - 5| - 1) \geq 0$ выполнено при $a = -5$; $a \geq 5$.

Ответ: $\{-5\} \cup [5; +\infty)$.

19. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$8x^6 + 4x^2 = (3x + 5a)^3 + 6x + 10a$$

не имеет корней.

Решение. Заметим, что исходное уравнение можно записать в виде

$$(2x^2)^3 + 2 \cdot (2x^2) = (3x + 5a)^3 + 2 \cdot (3x + 5a)$$

Рассмотрим функцию $y(t) = t^3 + 2t$.

Её производная $y'(t) = 3t^2 + 2 > 0$, значит, функция $y(t)$ является возрастающей и каждое свое значение принимает ровно один раз.

Тогда исходное уравнение равносильно квадратному уравнению

$$2x^2 = 3x + 5a$$

$$2x^2 - 3x - 5a = 0,$$

которое не имеет корней при

$$D = 9 + 40a < 0$$

$$a < -\frac{9}{40}$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{9}{40}\right)$.

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + 3x + a$$

не имеет корней.

Решение. Заметим, что исходное уравнение можно записать в виде

$$(4x^2)^3 + (4x^2) = (3x + a)^3 + (3x + a)$$

Рассмотрим функцию $y(t) = t^3 + t$. Её производная $y'(t) = 3t^2 + 1 > 0$, значит, функция $y(t)$ является возрастающей и каждое свое значение принимает ровно один раз. Тогда исходное уравнение равносильно квадратному уравнению

$4x^2 = 3x + a$ или $4x^2 - 3x - a = 0$, которое не имеет корней при $D = 9 + 16a < 0$, то есть при $a < -\frac{9}{16}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{9}{16}\right)$.

21. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 11|x + 2| + 3\sqrt{x^2 + 4x + 13} = 5a + 2|x - 2a + 2|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Пусть $t = x + 2$, тогда уравнение примет вид:

$$a^2 + 11|t| + 3\sqrt{t^2 + 9} = 5a + 2|t - 2a|.$$
 Пусть

$f(t) = 3\sqrt{t^2 + 9} + a^2 - 5a$, $g(t) = 2|t - 2a| - 11|t|$. При $t > 0$ функция $g(t)$ убывает от $g(0)$ до $-\infty$. При $t < 0$ функция $g(t)$ возрастает от $-\infty$ до $g(0)$.

Поэтому максимальное значение функции $g(t) = g(0) = 4|a|$.

Функция $f(t)$ принимает минимальное значение при $t = 0$: $f(t) = a^2 - 5a + 9$.

Причем $f(t)$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0)$, принимая значения от $f(0)$ до ∞ .

Чтобы было решение необходимо, чтобы $\max(g(t)) \geq \min(f(t))$, то есть $4|a| \geq a^2 - 5a + 9$. При $a \geq 0$ получаем

$$a^2 - 9a + 9 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

При $a < 0$ решений нет.

Ответ: $\left[\frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}; \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}\right]$.

22. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 7|x + 1| + 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2a + 3|x - 4a + 1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Пусть $t = x + 1$, тогда уравнение примет вид:

$$a^2 + 7|t| + 5\sqrt{t^2 + 4} = 2a + 3|t - 4a| \Leftrightarrow a^2 - 2a + 5\sqrt{t^2 + 4} = 3|t - 4a| - 7|t|.$$

При $t = 0$ левая часть уравнения принимает наименьшее значение $a^2 - 2a + 10$.

При $t \geq 0$ правая часть уравнения убывает и принимает значения от $12|a|$ до $-\infty$, а при $t < 0$ — возрастает, принимая значения от $-\infty$ до $12|a|$ (не включая), то есть наибольшее значение правой части уравнения достигается при $t = 0$ и равно $12|a|$.

Чтобы уравнение имело решение, наибольшее значение правой части должно быть не меньше наименьшего значения левой части:

$$12|a| \geq a^2 - 2a + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 - 14a + 10 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ a^2 + 10a + 10 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ 7 - \sqrt{39} \leq a \leq 7 + \sqrt{39} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ -5 - \sqrt{15} \leq a \leq -5 + \sqrt{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - \sqrt{39} \leq a \leq 7 + \sqrt{39}, \\ -5 - \sqrt{15} \leq a \leq -5 + \sqrt{15}. \end{cases}$$

Ответ: $[-5 - \sqrt{15}; -5 + \sqrt{15}] \cup [7 - \sqrt{39}; 7 + \sqrt{39}]$.

23. Найдите все целые отрицательные значения параметра a , при каждом из которых существует такое действительное число $b > a$, что неравенство $21b \geq 6|a+b| - 3|b-2| - |a-b| - 9|a^2 - b + 2| + 16$ **не выполнено**.

Решение. Решим вспомогательную противоположную задачу: найдём все a , при каждом из которых неравенство

$$21b \geq 6|a+b| - 3|b-2| - |a-b| - 9|a^2 - b + 2| + 16$$

выполнено при любом $b > a$. Заметим далее, что данное неравенство равносильно неравенству

$$F(b) = 21b - 6|a+b| + 3|b-2| + |a-b| + 9|a^2 - b + 2| - 16 \geq 0,$$

причём функция $F(b)$ строго монотонно возрастает на множестве действительных чисел и, следовательно, первоначальное неравенство выполняется для всех $b > a$ тогда и только тогда, когда $F(a) \geq 0$, то есть $9a^2 + 12a - 12|a| + 3|a-2| + 2 \geq 0$.

Отметим, что при $a \geq 0$ полученное неравенство верно. Если $a < 0$, то неравенство равносильно неравенству

$$9a^2 + 21a + 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-7 + \sqrt{17}}{6} \leq a < 0; \\ a \leq \frac{-7 - \sqrt{17}}{6}. \end{cases}$$

Таким образом, существует только одно целое отрицательное значение $a = -1$, при котором условие вспомогательной задачи не выполнено.

Следовательно, при значении $a = -1$ существует такое $b > a$, что неравенство $21b \geq 6|a + b| - 3|b - 2| - |a - b| - 9|a^2 - b + 2| + 16$ не выполнено.

Ответ: -1 .

24. Найдите все целые отрицательные значения параметра a , при каждом из которых существует такое действительное число $b > a$, что неравенство $20b \geq 6|2a + b| + 2|b - 2| - |2a - b| - 5|4a^2 - b + 2|$ не выполнено.

Решение. Решим вспомогательную противоположную задачу: найдём все a , при каждом из которых неравенство

$$20b \geq 6|2a + b| + 2|b - 2| - |2a - b| - 5|4a^2 - b + 2|$$

выполнено при любом $b > a$. Заметим далее, что данное неравенство равносильно неравенству

$$F(b) = 20b - 6|2a + b| - 2|b - 2| + |2a - b| + 5|4a^2 - b + 2| \geq 0,$$

причём функция $F(b)$ строго монотонно возрастает на множестве действительных чисел и, следовательно, первоначальное неравенство выполняется для всех $b > a$ тогда и только тогда, когда $F(a) \geq 0$, то есть

$$20a^2 + 15a - 17|a| - 2|a - 2| + 10 \geq 0.$$

Отметим, что при $a \geq 0$ полученное неравенство верно. Если $a < 0$, то неравенство равносильно неравенству

$$10a^2 + 17a + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -0,2 \leq a < 0; \\ a \leq -1,5. \end{cases}$$

Таким образом, существует только одно целое отрицательное значение $a = -1$, при котором условие вспомогательной задачи не выполнено.

Следовательно, при значении $a = -1$ существует такое $b > a$, что неравенство $20b \geq 6|2a + b| + 2|b - 2| - |2a - b| - 5|4a^2 - b + 2|$ не выполнено.

Ответ: -1 .

25. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Запишем уравнение в виде $9|x - 1| - 4x + |3x - |x + a|| = 0$. Функция $f(x) = 9|x - 1| - 4x + |3x - |x + a||$ непрерывна и неограниченно возрастает при $x \geq 1$, так как при любом раскрытии модулей

$$f(x) = 9x - 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m,$$

где $k \geq 9 - 4 - 4 = 1 > 0$. При $x \leq 1$ функция f убывает, так как при любом раскрытии модулей

$$f(x) = -9x + 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m,$$

где $k \leq -9 - 4 + 4 = -9 < 0$. Следовательно, наименьшее значение функция f принимает при $x = 1$, и уравнение $f(x) = 0$ будет иметь корень тогда и только тогда, когда $f(1) \leq 0$.

Решим это неравенство:

$$\begin{aligned} |3 - |1 + a|| \leq 4 &\Leftrightarrow -4 \leq |a + 1| - 3 \leq 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |a + 1| \leq 7 &\Leftrightarrow -7 \leq a + 1 \leq 7 \Leftrightarrow -8 \leq a \leq 6. \end{aligned}$$

Ответ: $-8 \leq a \leq 6$.

26. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$4x^2 - 3x - a = (3x + a)^3 - 64x^6$$

не имеет решений.

Решение. Преобразуем уравнение

$$\begin{aligned} 4x^2 - 3x - a = (3x + a)^3 - 64x^6 &\Leftrightarrow 64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + 3x + a \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (4x^2)^3 + 4x^2 &= (3x + a)^3 + (3x + a). \end{aligned}$$

Полученное уравнение имеет вид $f(4x^2) = f(3x + a)$, где $f(t) = t^3 + t$.

Функция f возрастающая как сумма двух возрастающих функций, поэтому каждое своё значение она принимает один раз. Тогда равенство значений функции означает равенство аргументов, а значит, исходное уравнение равносильно уравнению $4x^2 = 3x + a$, то есть уравнению

$$4x^2 - 3x - a = 0.$$

Полученное квадратное уравнение не имеет решений, если его дискриминант меньше нуля, откуда находим:

$$(-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-a) < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{9}{16}.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{9}{16}\right).$

27. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$2 \frac{2x}{1+x^2} + a \cdot \cos \frac{x^2-1}{x} + a^2 = \frac{5}{4}$$

имеет единственное решение.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$4 \frac{x}{1+x^2} + a \cdot \cos \frac{x^2-1}{x} + a^2 - \frac{5}{4} = 0.$$

Будем рассматривать выражение, стоящее в левой части уравнения, как функцию $f(x)$. Требуется найти значения параметра a , при которых уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень.

По смыслу задачи $x \neq 0$. Для таких значений переменной справедливо

равенство $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$, что непосредственно следует из тождеств:

$$\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + 1},$$

$$\cos \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{1}{x}} = \cos \frac{x^2 - 1}{x},$$

Чтобы уравнение имело единственное решение, должно выполняться

равенство $x = \frac{1}{x}$, то есть корнем должно быть число 1 или -1 , и при этом не должно быть других корней.

Поскольку $f(1) = a^2 + a + \frac{3}{4} > 0$ при всех значениях параметра, число 1 не является корнем ни при каком a . Определим, при каких значениях параметра

число -1 является корнем. Найдем $f(-1) = a^2 + a - \frac{3}{4}$. Решая уравнение

$a^2 + a - \frac{3}{4} = 0$, получаем: $a = -\frac{3}{2}$ или $a = \frac{1}{2}$. Осталось проверить, есть ли при найденных значениях a иные корни, кроме -1 .

Пусть $a = -\frac{3}{2}, x \neq -1$ тогда:

$$(x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 - x^2 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} > -1 \Leftrightarrow 2 \frac{2x}{1+x^2} > \frac{1}{2},$$

значит,

$$2 \frac{2x}{1+x^2} + 1 > \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} \cos \frac{x^2 - 1}{x},$$

а потому $f(x) > 0$. Следовательно, других корней, кроме -1 , нет.

Если $a = \frac{1}{2}$, то

$$f(x) = 2 \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x^2 - 1}{x} - 1.$$

Покажем, что в этом случае функция $f(x)$ помимо -1 имеет по меньшей мере

еще один корень. Заметим, что $f(1) = \frac{3}{2} > 0$ и подберем такое число $c > 1$, что

$f(c) < 0$. Последнее неравенство будет верно, если $\cos \frac{c^2 - 1}{c} = -1$ и при этом

$2 \frac{2c}{1+c^2} < \frac{3}{2}$. Возьмем больший корень уравнения $\frac{c^2 - 1}{c} = 3\pi$ — число

$c = \frac{3\pi + \sqrt{9\pi^2 + 4}}{2}$. Найденное $c > 4$, а тогда $\frac{2c}{1+c^2} < \frac{2c}{c^2} < \frac{1}{2}$ откуда

$$2 \frac{2c}{1+c^2} < 2 \frac{1}{2} < \frac{3}{2}.$$

Таким образом, непрерывная на отрезке $[1; c]$ функция $f(x)$ имеет разные знаки на концах отрезка. Следовательно, она обращается в нуль в какой-то

точке этого отрезка, а потому $a = \frac{1}{2}$ — не подходит.

Ответ: $a = -\frac{3}{2}$.

28. Найдите все положительные значения параметра a , при каждом из которых любое значение x из отрезка $[-1; 1]$ является решением неравенства

$$3a^{2x} - 16^x + 2 \cdot (4a)^x \geq 0.$$

Решение. Пусть $a^x = t, 4^x = b$, тогда $t, b > 0$ и

$$3t^2 - b^2 + 2bt \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - 2bt - 3t^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b - 3t)(b + t) \leq 0 \underset{b>0, t>0}{\Leftrightarrow} b - 3t \leq 0 \Leftrightarrow b \leq 3t.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$4^x \leq 3a^x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{a}\right)^x \leq 3.$$

Функция $f(x) = \left(\frac{4}{a}\right)^x$ монотонна на множестве действительных чисел при любом положительном значении a (при $0 < a < 4$ — возрастает, при $a > 4$ — убывает, при $a = 4$ — постоянна). Значит, любое число из отрезка $[-1; 1]$ будет являться решением неравенства $f(x) \leq 3$ тогда и только тогда, когда одновременно $f(1) \leq 3$ и $f(-1) \leq 3$, откуда получаем:

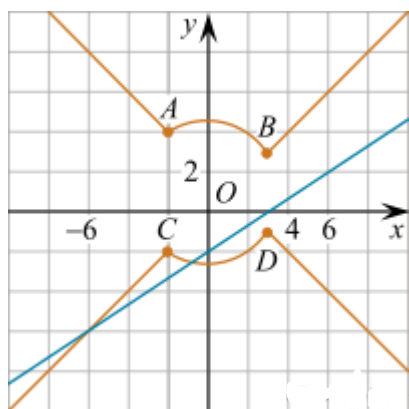
$$\begin{cases} \left(\frac{4}{a}\right)^1 \leq 3, \\ \left(\frac{4}{a}\right)^{-1} \leq 3 \end{cases} \underset{a>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a \geq \frac{4}{3}, \\ a \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq a \leq 12.$$

Ответ: $\left[\frac{4}{3}; 12\right]$.

29. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x^2 - x - 6| = (y - 1)^2 + x - 7, \\ 3y = 2x + a \end{cases}$$

имеет ровно один или ровно два корня.



Решение. Рассмотрим первое уравнение. На отрезке $[-2; 3]$ оно имеет вид $x^2 + (y - 1)^2 = 13$. Его график — две дуги окружности с центром в $(0; 1)$ и радиусом $\sqrt{13}$.

Вне указанного отрезка уравнение имеет вид $(x - 1)^2 = (y - 1)^2$, откуда $y - 1 = \pm(x - 1)$. В этом случае графиком является приведенное на рисунке объединение четырех лучей, лежащих на прямых $y = x$ и $y = 2 - x$.

Второе уравнение задаёт семейство прямых, параллельных прямой $y = \frac{2}{3}x$, каждая из которых проходит через точку $\left(0; \frac{a}{3}\right)$, зависящую от параметра a .

При $a = 16$ эта прямая проходит через точку $A(-2; 4)$. При $a = 3$ — через точку $B(3; 3)$. При $a = -2$ — через точку $C(-2; -2)$. При $a = -9$ — через точку $D(3; -1)$.

Из геометрических соображений ясно, что прямая касается окружности, когда проходит через точку A или точку $E(2; -2)$. Последнее происходит при $a = -10$.

На основе этого исследования можно записать ответ: одно или два решения система имеет при

$$a \in (-\infty; -10) \cup (-9; -2] \cup [3; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -10) \cup (-9; -2] \cup [3; +\infty)$.

30. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

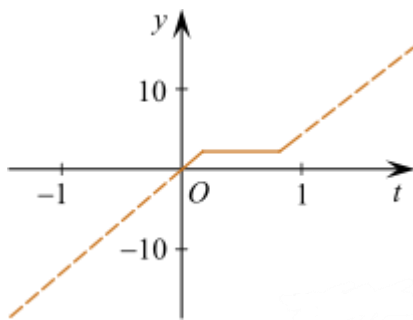
$$\begin{cases} \left| 6 \cdot \sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} - 5 \right| - \left| 1 - 6 \cdot \sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} \right| + \left| 12 \cdot \sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} + 1 \right| = 5 - \sin^2 \frac{\pi(y - 2x)}{12}, \\ 10 - 9(x^2 + (y - a)^2) = 3 \cdot \sqrt{x^2 + (y - a)^2 - \frac{8}{9}} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Решим первое уравнение системы. Пусть $t = \sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}}$, где $0 \leq t \leq 1$, тогда

$$|6t - 5| - |1 - 6t| + 12t - 4 = -\sin^2 \frac{\pi(y - 2x)}{12}. \quad (*)$$

Правая часть полученного уравнения не принимает положительных значений. Покажем, что при $0 \leq t \leq 1$ левая часть не принимает отрицательных значений, а потому на множестве корней уравнения обе части равны нулю. Рассмотрим на отрезке $[0; 1]$ функцию



$$f(t) = |6t - 5| - |1 - 6t| + 12t - 4 = \begin{cases} 12t, & \text{при } 0 \leq x < \frac{1}{6}, \\ 2, & \text{при } \frac{1}{6} \leq x < \frac{5}{6}, \\ 12t - 8, & \text{при } \frac{5}{6} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Это функция достигает на отрезке $[0; 1]$ своего наименьшего значения в единственной в точке $t = 0$, при этом $f(0) = 0$ (см. эскиз графика функции). Тогда в уравнении $(*)$ левая часть неотрицательна, а правая неположительна, значит, оно равносильно системе

$$\begin{cases} t = 0, \\ \sin \frac{\pi(y - 2x)}{12} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, первое уравнение исходной системы равносильно системам:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} = 0, \\ \sin \frac{\pi(y-2x)}{12} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi y}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ \frac{\pi(y-2x)}{12} = \pi n \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + 4k, \\ y - 2x = 12n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + 4k, \\ 2 + 4k - 2x = 12n \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2k - 6n, \\ y = 2 + 4k, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим второе уравнение исходной системы. Пусть $s = 9(x^2 + (y-a)^2)$, тогда

$$\begin{aligned}
10 - s = \sqrt{s-8} & \Leftrightarrow \begin{cases} (10-s)^2 = s-8, \\ 10-s \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} s^2 - 21s + 108 = 0, \\ 10-s \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} s = 9, \\ s = 12, \end{cases} \Leftrightarrow s = 9. \\ s \leq 10. \end{cases}
\end{aligned}$$

Отсюда

$$9(x^2 + (y-a)^2) = 9 \Leftrightarrow x^2 + (y-a)^2 = 1,$$

а потому $-1 \leq x \leq 1$.

Из решения первого уравнения исходной системы ($x = 1 + 2k - 6n, n \in \mathbb{Z}$) получаем, что только нечетные значения x могут быть решениями системы. Значит, x может принимать только два значения: или $x = 1$, или $x = -1$.

Если $x = 1$, то второе уравнение исходной системы имеет единственное решение $(1; a)$. Подставляя эти значения в решение первого уравнения, получаем:

$$\begin{cases} 1 = 1 + 2k - 6n, \\ a = 2 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3n, \\ a = 2 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3n, \\ a = 2 + 12n. \end{cases}$$

Если $x = -1$, то второе уравнение исходной системы имеет единственное решение $(-1; a)$. Подставляя эти значения в решение первого уравнения, получаем:

$$\begin{cases} -1 = 1 + 2k - 6n, \\ a = 2 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3n - 1, \\ a = 2 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3n - 1, \\ a = -2 + 12n. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение имеет решения при $a = \pm 2 + 12n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm 2 + 12n$, где

31. Найдите все значения параметра a из отрезка $[0; 2\pi]$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z(x + y + z) - \sin a = 0, \\ (x + 1) \sin^2 \frac{a}{2} + y^2 \sqrt{x} + a^2 \sqrt{z} + \sin \frac{3}{2}a = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. При $0 \leq a \leq 2\pi$ справедливы неравенства

$$x \geq 0, x \sin^2 \frac{a}{2} \geq 0, y^2 \sqrt{x} \geq 0, a^2 \sqrt{z} \geq 0, 0 \leq \sin \frac{a}{2} \leq 1.$$

Применяя в левой части второго уравнения исходной системы формулу синуса тройного угла, получаем:

$$x \sin^2 \frac{a}{2} + y^2 \sqrt{x} + a^2 \sqrt{z} + \sin^2 \frac{a}{2} + \sin \frac{3}{2}a \geq \sin^2 \frac{a}{2} + 3 \sin \frac{a}{2} - 4 \sin^3 \frac{a}{2} = -4 \cdot \left(\sin \frac{a}{2} - 1 \right) \cdot \left(\sin \frac{a}{2} + \frac{3}{4} \right) \cdot \sin \frac{a}{2} \geq 0.$$

Неравенство обращается в равенство, лишь если $\sin \frac{a}{2} = 1$ или $\sin \frac{a}{2} = 0$, то есть при $a = \{0; \pi; 2\pi\}$.

Выделяя в первом уравнении исходной системы полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x + z)^2 + (y + z)^2 = \sin a, \\ a \in \{0; \pi; 2\pi\}. \end{cases}$$

Для найденных значений параметра $\sin a = 0$, поэтому оба уравнения системы выполняются, например, при $x = y = z = 0$.

Ответ: $0, \pi, 2\pi$.

Примечание.

Это задание впервые было предложено для поступающих на механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова в 1995 году.

32. Найдите все значения a , при каждом из которых множество значений

функции $y = \frac{5a + 50x - 10ax}{25x^2 + 10ax + a^2 + 16}$ содержит отрезок $[0; 1]$.

Решение. Запишем функцию в виде $y = f(x) = \frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16}$. Её областью определения является вся числовая прямая, поскольку знаменатель не обращается в ноль. Данная функция непрерывна на всей числовой прямой.

При x стремящемся к $+\infty$ или $-\infty$ значение функции $f(x) = \frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16}$ стремится к 0. Учитывая поведение функции на $+\infty$ и $-\infty$ и наличие двух критических точек — точки минимума и точки максимума, следует, что множеством значений функции является отрезок. Тогда, для того чтобы множество значений функции содержало отрезок $[0; 1]$, оно должно содержать точки 0 и 1. Таким образом, условие задачи выполнено для тех и только тех значений a , для которых имеют решения уравнения

$$f(x) = \frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16} = 0 \quad \text{и} \quad f(x) = \frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16} = 1.$$

Первое уравнение:

$$\frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16} = 0 \Leftrightarrow 10(a - 5)x = 5a \Leftrightarrow x = \frac{a}{2(a - 5)}.$$

Уравнение имеет решение при любом $a \neq 5$.

Второе уравнение:

$$\frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16} = 1 \Leftrightarrow 25x^2 + 10(2a - 5)x + a^2 - 5a + 16 = 0.$$

Уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$\begin{aligned} D &= 100(2a - 5)^2 - 100(a^2 - 5a + 16) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 100(4a^2 - 20a + 25 - a^2 + 5a - 16) \geq 0 \Leftrightarrow 300(a^2 - 5a + 3) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(a - \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right) \left(a - \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Решением этого неравенства являются множества $\left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right]$ и $\left[\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют значения $a \in \left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; 5\right) \cup (5; +\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; 5\right) \cup (5; +\infty)$.

33. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{|x^2 + 6x + 6| + 1} \cdot \lg^{-1}(6a - a^2 - 4) = \sqrt{6a - a^2 - 4} \cdot \lg^{-1}(|x^2 + 6x + 6| + 1)$$

имеет не менее трех корней.

Решение. Определим знаки каждого из четырех множителей на области определения:

$$|x^2 + 6x + 6| + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{|x^2 + 6x + 6| + 1} > 1,$$

аналогично $\lg(|x^2 + 6x + 6| + 1) \geq 0$, а поскольку должен существовать $\lg^{-1}(|x^2 + 6x + 6| + 1)$, оба этих логарифма положительны.

Поскольку три из четырех множителей больше нуля, то и четвертый больше нуля:

$$\lg^{-1}(6a - a^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow 6a - a^2 - 4 > 1.$$

Кроме того, $6a - a^2 - 4 = 5 - (a - 3)^2 \leq 5$. С учетом всех ограничений находим:

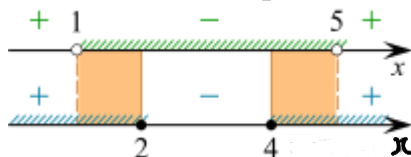
$$\begin{cases} 1 < 6a - a^2 - 4 \leq 5, \\ x^2 + 6x + 6 \neq 0, \\ \sqrt{|x^2 + 6x + 6| + 1} \cdot \lg(|x^2 + 6x + 6| + 1) = \sqrt{6a - a^2 - 4} \cdot \lg(6a - a^2 - 4). \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \sqrt{t} \cdot \lg t$ при $t > 1$. Поскольку оба множителя положительны и возрастают, то и $f(t) > 0$ возрастает. Поэтому если $f(x) = f(y)$ при $x > 1$ и $y > 1$, то $x = y$. Значит,

$$\begin{cases} 1 < 6a - a^2 - 4 \leq 5, \\ x^2 + 6x + 6 \neq 0, \\ |x^2 + 6x + 6| + 1 = 6a - a^2 - 4, \end{cases}$$

полученная система должна иметь не менее трех решений.

Функция $g(x) = x^2 + 6x + 6 = (x + 3)^2 - 3$ квадратичная с положительным старшим коэффициентом, поэтому принимает все значения от $y_{\min} = -3$ включая до $+\infty$, причем значения от $(-3; +\infty)$ по два раза. Значит, $|g(x)| + 1$ при $g(x) \neq 0$ принимает все значения из интервала $(1; 4)$ по четыре раза, значение 4 — трижды, значения из луча $(4; +\infty)$ по два раза.



Таким образом, подойдут все такие a , что $1 < 6a - a^2 - 4 \leq 4$, откуда находим:

$$\begin{cases} a^2 - 6a + 5 < 0, \\ a^2 - 6a + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)(a - 5) < 0, \\ (a - 4)(a - 2) \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $a \in (1; 2] \cup [4; 5)$.

34. Найдите (в градусах) сумму всех значений параметра α , где $0^\circ < \alpha < 1000^\circ$, для каждого из которых существует хотя бы одно число $x \in [1; 2]$, удовлетворяющее уравнению

$$1 + \cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|}.$$

Решение. Заметим, что левая часть уравнения не меньше 1, а правая — не больше 1. Значит, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 + \cos^2 \left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ \right) = 1, \\ \left(\frac{1}{3} \right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ \right) = 0, \\ \cos \pi x - \sin \pi x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ = 90^\circ + 180^\circ k, \\ \pi x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Из уравнения $\pi x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ находим: $x = \frac{1}{4} + n, n \in \mathbb{Z}$. Значит, существуют только одно число $x \in [1; 2]$, удовлетворяющее исходному уравнению. Это число — $\frac{5}{4}$. Подставим его в первое уравнение полученной системы и найдём возможные значения параметра α :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{5}{4} + 67,5^\circ &= 90^\circ + 180^\circ k \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5\alpha &= 180^\circ + 8 \cdot 180^\circ k \Leftrightarrow \alpha = 36^\circ + 288^\circ k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Условию $0^\circ < \alpha < 1000^\circ$ удовлетворяют четыре значения параметра, а именно $36^\circ, 324^\circ, 612^\circ$ и 900° . Их сумма равна 1872° .

Ответ: 1872° .

Список литературы

1. Горнштейн, П. И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – К. : РИА «Тест», 1992.
2. Елисеев Ю. Решение задач с параметрами, Пермь, 2012г, 12с.
3. Образовательный портал <https://ege.sdangia.ru/?r>
4. Открытый банк заданий ЕГЭ | Математика. Профильный уровень <https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B>
5. Прокофьев А.А. Рекомендации по подготовке к выполнению задания №17 (задачи с параметром) ЕГЭ профильного уровня, Зеленоград, 2022, 75с.
6. Сканави М.И. Полный сборник задач для поступающих в ВУЗы. Группа повышенной сложности / Под редакцией М.И. Сканави. – М.: ООО «Издательство «Мир и образование»: Мн.: ООО «Харвест», 2006. – 624 с.: ил.
7. Ткачук В.В. Математика – абитуриенту. Том 1 [Текст] / В. В. Ткачук. - М.: МЦНМО ТЕИС, 1996.-415 с.