

государственное общеобразовательное учреждение Ярославской области
«Лицей №86»

**Сборник экономических задач по подготовке к ЕГЭ по
профильной математике**

Кредиты

Автор: Петрова Юлия Сергеевна,
ученица 11 «Ф» класса
ГООУ ЯО «Лицей № 86»

Ярославль 2024

Введение

Дорогой мой сверстник!

Может быть тебе, как и мне, предстоит сдавать единый государственный экзамен по математике профильного уровня. Я учусь в фармацевтическом классе и изучаю математику на базовом уровне, поэтому прилагаю много усилий для дополнительной подготовки к экзамену. С одной стороны, работа над проектом направлена на повышение моего образовательного результата по математике, а с другой стороны, и это самое главное, на подготовку учебного пособия по решению экономических задач для самостоятельных занятий учеников 10-11 классов.

Первая часть пособия – «Кредиты». Эта тема важна и интересна для всех. Мне кажется, что каждый человек за свою жизнь хоть один раз, но берет в банке кредит на определенные цели. А значит, должен просчитывать все риски, понимать окончательную сумму платежа, владеть основами экономической теории. То есть знания из этого пособия пригодятся каждому и в дальнейшей жизни.

В данной брошюре в «Главе 1» коротко изложены необходимые теоретические сведения и в качестве повторения рассматривается несколько подготовительных задач. В «Главе 2» разбираются типы задач на кредиты, не входящих в традиционные школьные учебники. К каждой задаче и приводится универсальный алгоритм решения. В «Главе 3» предложены задачи для самостоятельного решения.

Глава 1. Необходимые теоретические сведения

Проценты, доли и соотношения.

Процент от числа — это $\frac{1}{100}$ часть числа. Обозначается знаком «%».

При решении задач на анализ динамики экономических показателей всегда устанавливайте взаимно однозначное соответствие между процентами и коэффициентами. Выражение «величина увеличилась (уменьшилась) на x процентов» нужно воспринимать в виде «величина умножилась на коэффициент k » и наоборот. В общем виде соответствие между количеством процентов x , на которое изменилось исходное значение экономического показателя, и коэффициентом k , на который он домножается, можно представить в виде:

увеличился на $x\%$ — умножился на коэффициент $k = \frac{100 + x}{100}$; уменьшился на $x\%$

$$k = \frac{100 - x}{100}.$$

— умножился на коэффициент

Например:

— величина увеличилась на 30%, значит, и величина $k = \frac{100 + 30}{100}$ и величина умножилась на коэффициент $k = 1,3$;

— величина уменьшилась на 17%, значит, $k = \frac{100 - 17}{100}$ и величина

умножилась на коэффициент $k = 0,83$.

Если некоторая величина по условию задачи изменяется неоднократно с течением времени, то проценты всякий раз берутся от её последнего (текущего) значения, в случае, когда противное не оговорено явно. При всяком упоминании процентов важно чётко понимать, от какой базовой величины берутся эти проценты. Отсутствие указанного понимания неизбежно влечёт за собой распространённые ошибки. Необходимо различать утверждения «величина A больше величины B на a процентов» и «величина B меньше величины A на a процентов», которые не являются равносильными, так как проценты в них берутся от разных базовых величин.

Простые проценты

В этом случае проценты каждый раз начисляются на первоначальную сумму A_0 вне зависимости от срока хранения вклада и начисленных перед этим процентов. Пусть $x\%$ начисляются в конце каждого периода по правилу простых процентов (в зависимости от условия задачи периодом может быть месяц, квартал, год и т.п.) Тогда через t периодов величина средств, лежащих на счету вкладчика, станет

$$A_m = \left(1 + m \cdot \frac{x}{100}\right) A_0.$$

равной

Сложные проценты

В этом случае проценты каждый раз начисляются на всю имеющуюся на вкладе сумму (с учётом процентов, которые до этого были уже начислены и тем самым добавлены к сумме вклада). Пусть изначальная сумма вклада равна A_0 и $x\%$ начисляются в конце каждого периода по правилу сложных процентов (в зависимости от условия задачи периодом может месяц, квартал, год и т.п.). Тогда через m периодов величина средств, лежащих на счету вкладчика, станет

$$A_m = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^m A_0.$$

равной

Изложим ещё некоторые теоретические положения, полезные при решении различных заданий.

Если некоторая численная величина A делится на две части в отношении $m:n$ (например, количество товаров первого и второго сорта), то первая часть

равна $\frac{mA}{m+n}$, а вторая часть равна $\frac{nA}{m+n}$.

Аналогично, если некоторая численная величина A делится на три части в

отношении $k:m:n$, то первая часть равна $\frac{kA}{k+m+n}$, вторая часть равна $\frac{mA}{k+m+n}$, а третья часть равна $\frac{nA}{k+m+n}$.

Подобные правила для отношений будут выполняться и в том случае, когда количество частей, на которые делится число, больше трёх.

Примеры решения задач

Пример 1. Магазин увеличил цену товара в 8 раз. Однако по результатам проверки антимонопольная служба предписала вернуть прежнюю цену. На сколько процентов придётся снизить цену?

Решение. Пусть изначально товар стоил x рублей. Тогда после подорожания он стал стоить $8x$ рублей. По результатам проверки цена снизилась на $7x$, что

составляет $\frac{7x}{8x} \cdot 100\% = 87,5\%$ от суммы $8x$ рублей.

Ответ: 87,5

Пример 2. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 25 000 рублей. Какую сумму он получит после вычета налога на доходы?

Решение. После вычета налога на доходы Иван Кузьмич получит $100\% - 13\% = 87\% = 87:100 = 0,87$ от начисленной заработной платы. $25\,000 \cdot 0,87 = 21\,750$

рублей.

Ответ: 21750 рублей.

Пример 3. В начале мая цена на помидоры повысилась на 20%, а в начале июня понизилась на 20%. На сколько процентов цена помидоров в июне после понижения стала ниже, чем цена помидоров в мае до повышения?

Решение. Пусть x — цена килограмма помидоров в начале мая, до повышения. Тогда после повышения она стала $x \cdot 1,2$. После понижения цены в июне стоимость килограмма помидоров стала $x \cdot 1,2 \cdot 0,8$. Но $x \cdot 1,2 \cdot 0,8 = 0,96x$. Так как $0,96x$ составляет 96% от x , то цена килограмма помидоров в июне после понижения стала ниже, чем цена помидоров в мае до повышения, на 4%.

Ответ: 4.

Кредиты

Кредит — это финансовая сделка, в результате которой кредитор (банк или другое финансовое учреждение) предоставляет на определённый срок деньги заёмщику. За пользование деньгами заёмщик кроме погашения основного долга (называемого в финансовой литературе телом кредита) выплачивает кредитору также проценты. Разделение погашающих платежей на две части — погашение долга (тела кредита) и погашение процентных денег — принципиально важно, поскольку от этого зависят уплачиваемые налоги.

Будет рассмотрено среди прочих две основные схемы погашения кредитов: *дифференцированная* (разными платежами, убывающими в арифметической прогрессии) и *аннуитетная* (равными платежами) — принятые и работающие во всём мире.

При дифференцированной(или регрессивной) схеме ежемесячный платёж включает в себя постоянную сумму для погашения основного долга по кредиту, к которой прибавляются проценты на оставшуюся часть долга. При этом регулярные платежи заёмщика оказываются различными. Методика расчёта платежей в этом случае базируется на использовании арифметической прогрессии. Процентный платёж за пользование потребительским кредитом обычно вычисляется «вперёд»: для первого месяца процентный платёж рассчитывается на всю величину долга, а в каждый следующий месяц — на остаток долга, т.е. величину долга, уменьшенную на уже выплаченную часть.

На сегодняшний день большим спросом среди заёмщиков пользуется аннуитетная схема: заёмщику удобно, когда сумма ежемесячного (ежеквартального или ежегодного) платежа фиксируется на весь срок кредитования. Отметим, что при решении практических задач часто удобнее проводить вычисления, используя обыкновенные дроби вместо десятичных. Так, если годовая процентная ставка $p = 25\%$, то ей соответствует коэффициент

$$q = 1 + \frac{25}{100} = \frac{5}{4}. \quad \text{А если } p=20\%, \text{ то } q = 1 + \frac{20}{100} = \frac{6}{5}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Предприниматель обратился в банк с просьбой о предоставлении ссуды в размере 1 000 000 рублей сроком на 1 год. Банк выделил ему эту ссуду с годовой процентной ставкой 20% при условии погашения ссуды одним платежом в конце срока. Какую сумму должен через год возвратить предприниматель банку? Какие процентные деньги получит банк?

Решение. Через год предприниматель должен вернуть банку
 $1000000 \cdot 1,2 = 1200000$ (рублей), банк на этом
заработает: $1200000 - 1000000 = 200000$ (рублей).

Ответ: 1200000 рублей; 200000 рублей.

Пример 2. В июле 2017 года был взят кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы: каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг	S	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором каждая из выплат будет больше 3 млн рублей

Решение. Пусть S — сумма кредита; x_1, x_2, x_3 — выплаты с февраля по июнь каждого года. Начисление 25% соответствует умножению на коэффициент $1 + \frac{25}{100} = 1,25$.

Составим уравнения, которые соответствуют графику погашения кредита:

$$2018 \text{ г. : } 1,25S - x_1 = 0,7S$$

$$2019 \text{ г. : } 1,25 \cdot 0,7S - x_2 = 0,4S$$

$$2020 \text{ г. : } 1,25 \cdot 0,4S - x_3 = 0$$

Таким образом, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют

$$x_1 = 0,55S; \quad x_2 = 0,475S; \quad x_3 = 0,5S$$

Наименьшая из выплат должна быть больше 3 млн рублей:

$$0,475S > 3, S > 3 \cdot \frac{1000}{475}, S > 3 \cdot \frac{40}{19}, S > 6\frac{6}{19}.$$

Наименьшим целым числом, удовлетворяющим последнему неравенству, является $S = 7$.

Ответ:7.

Пример 3. Банк выдал заёмщику кредит в размере 30000 рублей, ежегодная выплата по кредиту составляет 10 000 рублей (последний платёж может отличаться от остальных в меньшую сторону), процентная ставка — 20% годовых. Через сколько лет кредит будет погашен? Сколько составит переплата?

Решение. Составим таблицу погашения кредита.

Сумма кре- дита A	Проценты по кредиту $0,2A$	Еже- годная выплата	Погашение тела кредита $B = 10\,000 - 0,2A$	Тело кредита на начало след. года $A - B$
30 000	6000	10 000	4000	26 000
26 000	5200	10 000	4800	21 200
21 200	4240	10 000	5760	15 440
15 440	3088	10 000	6912	8528
8528	1705,6	10 000	8294,4	233,6
233,6	46,72	280,32	233,6	0
Итого		50 280,32	30 000	

Переплата составит $50\,280,32 - 30\,000 = 20\,280,32$ рубля

Ответ: 6 лет; 20 280,32 рубля.

Пример 4. 20 декабря 2015 года Сергей Михайлович взял в банке 800 000 рублей в кредит. План выплаты кредита такой: 20 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем Сергей Михайлович переводит и банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Сергей Михайлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 360000 рублей?

Решение. Очевидно, что чем больше Сергей Михайлович будет выплачивать в месяц, тем быстрее он погасит кредит. Поэтому предположим, что первые месяцы Сергей Михайлович будет выплачивать ровно по 360 000 рублей, а в последний месяц эта сумма может оказаться меньше.

Через месяц после того, как кредит был взят, в результате начисления процентов Сергей Михайлович окажется должен $1,02 \cdot 800\,000 = 816\,000$ рублей, а после ежемесячной выплаты эта сумма составит $816\,000 - 360\,000 = 456\,000$

рублей. Ещё через месяц размер долга возрастёт до $1,02 \cdot 456000 = 465\,120$ рублей и после очередной выплаты уменьшится до 105 120 рублей. Наконец, ещё через месяц этот долг возрастёт до $1,02 \cdot 105\,120 = 107\,222,4$ рубля, и Сергей Михайлович погасит кредит.

Таким образом, минимальное количество месяцев, на которое Сергей Михайлович может взять кредит, равно 3.

Ответ: 3.

Глава 2. Алгоритмы решения сложных задач на кредиты

Тип 1. Равные платежи

Особенность этого типа заданий в том, что заемщик всегда вносит одинаковые суммы.

Пример 5. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r .

Мы предлагаем научить школьника упорядочивать данные банковской задачи в ЕГЭ по математике с помощью таблицы

Последовательность заполнения таблицы:

1. Начислили процент на сумму долга;
 2. Посчитали выплату;
 3. Посчитали сколько долга осталось после.
1. Если взять всю сумму долга за S , то в первый платежный период на нее набегут проценты r , и тогда долг станет:

$$\underbrace{S}_{\text{долг}} + \underbrace{\frac{r}{100}S}_{\text{набежавший процент}} = S \underbrace{(1 + r/100)}_{=k} = Sk$$

2. Теперь работаете с платежом в этом году. Тут все просто, он фиксированный, обозначим его за $a = 58\,564$ рубля.
3. Последний шаг в этом платежном периоде – посчитать остаток долга после выплаты:

$$Sk - a$$

Заполним таблицу, учитывая обе ситуации из условия. Для наглядности каждую выделим жирной рамкой.

	Январь Долг после начисления процента	Февраль- июнь Выплата	Июль Долг после очередной выплаты
1 год	$\underbrace{S}_{\text{долг}} + \underbrace{\frac{r}{100}S}_{\text{набежавший процент}} = S \underbrace{(1 + r/100)}_{=k} = Sk$	$a = 58\,564$	$Sk - a$
2 год	$\underbrace{(Sk - a)}_{\text{долг}} * \underbrace{k}_{1+r/100} = Sk^2 - ak$	a	$Sk^2 - ak - a$
3 год	$Sk^3 - ak^2 - ak$	a	$Sk^3 - ak^2 - ak - a$
4 год	$Sk^4 - ak^3 - ak^2 - ak$	a	$Sk^4 - ak^3 - ak^2 - ak - a = 0$
1 год	$\underbrace{S}_{\text{долг}} + \underbrace{\frac{r}{100}S}_{\text{набежавший процент}} = S \underbrace{(1 + r/100)}_{=k} = Sk$	$b = 106\,964$	$Sk - b$
2 год	$(Sk - b) * k = Sk^2 - bk$	b	$Sk^2 - bk - b = 0$

Приступаем ко второму шагу – переходим от структурированных данных к математической модели.

Мы получаем два уравнения, которые подсветили в табличке оранжевым. Объединим их в систему и решим!

$$\begin{cases} Sk^4 - ak^3 - ak^2 - ak - a = 0, \\ Sk^2 - bk - b = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} Sk^4 = a(k^3 + k^2 + k + 1), \\ Sk^2 = b(k + 1). \end{cases}$$

Рационально разделить одно уравнение на другое, ведь так мы избавимся от одной неизвестной S:

$$\frac{Sk^4}{Sk^2} = \frac{a(k^2(k+1) + (k+1))}{b(k+1)},$$

$$\frac{Sk^4}{Sk^2} = \frac{a(k^2 + 1)(k + 1)}{b(k + 1)},$$

$$k^2 = \frac{a(k^2 + 1)}{b},$$

$$k^2(b - a) = a,$$

$$k = \sqrt{\frac{a}{b - a}}.$$

$$k = \sqrt{\frac{58\,564}{106\,964 - 58\,564}} = \sqrt{\frac{58\,564}{48\,400}} = \sqrt{\frac{29\,282}{24\,200}} = \sqrt{\frac{14\,641}{12\,100}} = \sqrt{\frac{1331}{1100}} = \sqrt{\frac{121}{100}} = 1,1$$

Вспоминаем, что $k=1+r/100$, а найти нам надо r .

Ответ: 10%.

Делаем вывод:

Чтобы решить задачу и получить 2 балла на профильном ЕГЭ по математике, нужно:

- Воспользоваться алгоритмом упорядочивания данных.
- Составить математическую модель.
- Провести рационально все математические расчеты.

Это и есть алгоритм решения банковской задачи.

Тип 2. Равномерно убывающий долг

Пример 6. 15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

Проанализируем отличие условия задачи № 6 от задачи № 5.

В прошлой задаче заемщик платил одинаковую сумму каждый месяц. Тут ему нужно уменьшать долг на одну и ту же величину. То есть за месяц пользования деньгами банк начислил на них процент, клиент теперь должен чуть больше. Своим платежом он оплатит банку проценты, чтобы заем стал таким, как ДО их начисления. А сверху внесет сумму, которая как раз и пойдет на то самое РАВНОМЕРНОЕ уменьшение долга.

Значит в Примере 6 – главный элемент – равномерно убывающий долг. Если мы взяли сумму S на 39 месяцев, и каждый месяц долг должен быть меньше на одинаковую величину, то эта величина равна $1/39 S$.

Проанализируем первый месяц:

1. Долг после начисления процентов:

$$S + \frac{r}{100}S = S \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

2. Выплаты обозначим за a с порядковым номером. Тут они будут разные! Каждый раз гасим набежавшие проценты и $1/39$ часть долга:

$$a_1 = \underbrace{\frac{r}{100} * S}_{\text{проценты}} + \underbrace{\frac{1}{39}S}_{\substack{\text{часть, которую надо гасить,} \\ \text{чтобы долг убывал равномерно} \\ \text{в течение 39 месяцев}}}$$

3. Остаток долга после выплаты:

$$S - \frac{1}{39}S = \frac{38}{39}S$$

Анализируя следующие месяцы, вносим данные в таблицу:

	1-е число месяца Долг после начисления процента	2-14 число Выплата (набежавший процент + часть долга)	15-е число Долг после очередной выплаты
1 месяц	$\underbrace{S}_{\text{Долг}} + \underbrace{\frac{r}{100}S}_{\text{Процент}} = S \left(1 + \frac{r}{100}\right)$	$a_1 = \underbrace{\frac{r}{100}S}_{\text{Процент}} + \underbrace{\frac{1}{39}S}_{\substack{\text{Сумма в счет} \\ \text{долга}}}$	$\frac{38}{39}S$
2 месяц	$\frac{38}{39}S + \frac{r}{100} * \frac{38}{39}S = \frac{38}{39}S \left(1 + \frac{r}{100}\right)$	$a_2 = \underbrace{\frac{r}{100} * \frac{38}{39}S}_{\text{Процент}} + \underbrace{\frac{1}{39}S}_{\substack{\text{Сумма в счет} \\ \text{долга}}}$	$\frac{37}{39}S$
3 месяц	$\frac{37}{39}S + \frac{r}{100} * \frac{37}{39}S = \frac{37}{39}S \left(1 + \frac{r}{100}\right)$	$a_3 = \frac{r}{100} * \frac{37}{39}S + \frac{1}{39}S$	$\frac{36}{39}S$
...	...	...	...
38 месяц	$\frac{2}{39}S + \frac{r}{100} * \frac{2}{39}S = \frac{2}{39}S \left(1 + \frac{r}{100}\right)$	$a_{38} = \frac{r}{100} * \frac{2}{39}S + \frac{1}{39}S$	$\frac{1}{39}S$
39 месяц	$\frac{1}{39}S + \frac{r}{100} * \frac{1}{39}S = \frac{1}{39}S \left(1 + \frac{r}{100}\right)$	$a_{39} = \frac{r}{100} * \frac{1}{39}S + \frac{1}{39}S$	$\underbrace{0}_{\text{Долг выплачен}}$

Составим математическую модель. Единственная информация в задаче, которую мы до сих пор не использовали — общая сумма выплат. По условию она на 20% больше суммы кредита, то есть равна $1,2S$:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{39} = \frac{r}{100}S + \frac{1}{39}S + \frac{r}{100} * \frac{38}{39}S + \frac{1}{39}S + \frac{r}{100} * \frac{37}{39}S + \frac{1}{39}S + \dots + \frac{r}{100} * \frac{1}{39}S + \frac{1}{39}S = 1,2S.$$

Приведем подобные слагаемые, вынесем общий множитель за скобку:

$$\frac{r}{100}S \left(\underbrace{1 + \frac{38}{39} + \frac{37}{39} + \dots + \frac{1}{39}}_{=20} \right) + S = 1,2S.$$

$$\begin{aligned} \frac{r}{100} * 20 + 1 &= 1,2 \\ \frac{r}{5} &= 0,2 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

Разделим обе части на S и упростим выражение:

Ответ: 1%.

Тип 3. Долг, убывающий согласно табличке

Пример 7. 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	5.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн рублей.

Задача похожа на прошлую. Разница лишь в том, что кроме процентов нам каждый месяц придется гасить не равную долю долга, а долю согласно таблице.

Отличие от прошлого типа будет лишь в том, что в третий столбец мы будем записывать не равномерно убывающий долг, а перенесем остаток долга из таблицы условия. Для облегчения вычислений считать будем в миллионах:

	1-е число месяца Долг после начисления процента	2-14 число Выплата (набежавший процент + часть долга)	Конец месяца Долг после очередной выплаты
1 месяц	$1 + \frac{r}{100} * 1 = 1 * (1 + \frac{r}{100})$	$\underbrace{\frac{r}{100} * 1}_{\text{проценты}} + \underbrace{0,1}_{\text{платеж в счет долга}}$	0,9 млн
2 месяц	$0,9 + \frac{r}{100} * 0,9 = 0,9 * (1 + \frac{r}{100})$	$\underbrace{\frac{r}{100} * 0,9}_{\text{проценты}} + \underbrace{0,1}_{\text{платеж в счет долга}}$	0,8 млн
3 месяц	$0,8 + \frac{r}{100} * 0,8 = 0,8(1 + \frac{r}{100})$	$\frac{r}{100} * 0,8 + 0,1$	0,7 млн
4 месяц	$0,7 + \frac{r}{100} * 0,7 = 0,7(1 + \frac{r}{100})$	$\frac{r}{100} * 0,7 + 0,1$	0,6 млн
5 месяц	$0,6 + \frac{r}{100} * 0,6 = 0,6(1 + \frac{r}{100})$	$\frac{r}{100} * 0,6 + 0,1$	0,5 млн
6 месяц	$0,5 + \frac{r}{100} * 0,5 = 0,5(1 + \frac{r}{100})$	$\frac{r}{100} * 0,5 + 0,5$	0

Чтобы долг убывал согласно табличке, нам снова каждый раз придется гасить набежавшие проценты и первые 5 месяцев добавлять сверху 0,1 млн. После останется погасить весь остаток.

Сумма выплат должна быть БОЛЬШЕ 1,2 млн. Отразим это в модели с помощью неравенства:

$$\underbrace{\frac{r}{100} * 1 + 0,1}_{\text{первый платеж}} + \underbrace{\frac{r}{100} * 0,9 + 0,1}_{\text{второй платеж}} + \frac{r}{100} * 0,8 + 0,1 + \frac{r}{100} * 0,7 + 0,1 + \frac{r}{100} * 0,6 + 0,1 + \underbrace{\frac{r}{100} * 0,5 + 0,5}_{\text{последний платеж}} > 1,2$$

Приведем подобные и вынесем общие множители за скобку:

$$\frac{r}{100} (1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) + 1 > 1,2$$

$$\frac{r}{100} * 4,5 > 0,2$$

$$r > \frac{2 * 100}{45}$$

$$r > 4 \frac{20}{45}$$

Последний шаг – не забыть, что по условию процент должен быть целым и округлить в верную сторону.

Ответ: 5%.

Тип 4. Погашение кредита в два этапа.

Пример 8. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 13 месяцев. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 12-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 13-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 804 тысячи рублей?

По сути, это та же задача, что и в Примере 7, но месяцев больше

Последовательно начисляем процент на остаток долга – считаем выплату – фиксируем остаток долга после выплаты. Сумму кредита возьмем за S.

	1-е число месяца Долг после начисления процента	2-14 число Выплата (набежавший процент + часть долга)	15-е число Долг после очередной выплаты
1 месяц	$S + \frac{r}{100}S = S(1 + \frac{r}{100})$	$\underbrace{\frac{r}{100}S}_{\text{проценты}} + \underbrace{50}_{\text{в счет долга}}$	$S - 50$
2 месяц	$(S - 50)(1 + \frac{r}{100})$	$\frac{r}{100} * (S - 50) + 50$	$S - 50 * 2$
3 месяц	$(S - 50 * 2)(1 + \frac{r}{100})$	$\frac{r}{100} * (S - 50 * 2) + 50$	$S - 50 * 3$
...	...	...	...
12 месяц	$(S - 50 * 11)(1 + \frac{r}{100})$	$\frac{r}{100} * (S - 50 * 11) + 50$	$S - 50 * 12$
13 месяц	$(S - 50 * 12)(1 + \frac{r}{100})$	$\frac{r}{100} * (S - 50 * 12) + \underbrace{a}_{\text{последний платеж в счет долга, который погасит его полностью}}$	0

Заполняя таблицу, удобнее вместо записи S-600, написать S-50*12, потому что сразу ясно, что речь идет о двенадцатом месяце.

Осталось составить уравнение, и модель готова. В задаче нам известна сумма всех выплат:

$$\frac{r}{100}S + 50 + \frac{r}{100} * (S - 50) + 50 + \frac{r}{100} * (S - 50 * 2) + 50 + \dots + \frac{r}{100} * (S - 50 * 11) + 50 + \frac{r}{100} * (S - 50 * 12) + a = 804$$

Для рационального решения сгруппируем отдельно слагаемые с r/100, отдельно слагаемые без них:

$$\frac{r}{100}(S + S - 50 + S - 50 * 2 + S - 50 * 3 + \dots + S - 50 * 11 + S - 50 * 12) + \underbrace{50 * 12 + a}_{\text{Все платежи, которые пошли в счет долга и равны } S} = 804$$

Осталось привести уравнение к решаемому виду. Для этого надо просуммировать то, что получилось в скобках. Если внимательно приглядеться, то видно, что это сумма арифметической прогрессии:

первый член $a_1 = S$

разность $d = -50$

количество членов $n = 13$

Посчитаем эту сумму:

$$\sum = \frac{2 * a_1 + d(n - 1)}{2} * n = \frac{2S - 50(13 - 1)}{2} * 13 = (S - 50 * 6) * 13 = 13S - 300 * 13$$

Подставляем выражение для суммы в уравнение, заметим, что по условию $r=2$:

$$\frac{2}{100} (13S - 300 * 13) + S = 804$$

$$0,26S - 78 + S = 804$$

$$1,26S = 882$$

$$S = \frac{88200}{126} = \frac{44100}{63} = \frac{14700}{21} = 700$$

Ответ: 700 тысяч.

Глава 3. Задачи для самостоятельного решения.

Задача № 1

В июне 2028 года планируется взять кредит на 10 лет в размере 1500 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь с 2029 по 2033 год долг возрастает на 22% по сравнению с концом предыдущего года;
- каждый январь с 2034 по 2038 год долг возрастает на 18% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по май каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июне каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июню 2038 года долг должен быть полностью погашен.

На сколько рублей последняя выплата будет меньше выплаты 2033 года?

Задача № 2

Евгений взял 16 января кредит на сумму 1 млн руб. на 6 месяцев. Условия его возврата таковы. Каждый месяц 1-го числа долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца. Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга. Каждый месяц 15-го числа долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг, млн руб.	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет составлять более 1,25 млн руб.

Задача № 3

Местный завод «Ширпотреб» взял кредит на сумму S рублей в банке сроком на 4 года. Платежи производятся раз в год так, что долг уменьшается на одну и ту же сумму. В конце года банк начисляет p процентов на сумму долга, а в начале следующего года завод производит платеж. В итоге разница между первым и заключительным платежами составила $0,15S$. Найдите p .

Задача № 4

В июле планируется взять кредит в банке на 12 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r , если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту в 2 раза больше наименьшего платежа.

Задача № 5

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 545 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 40% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Ответы к задачам:

Задача №1	171 000 рублей.
Задача №2	$r=6$
Задача №3	$p = 20$.
Задача №4	10%
Задача №5	1 029 000 рублей.

Список источников

1. Методичка по решению экономических задач (задание 17 ЕГЭ)-URL:https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/library/metodichka_po_resheniyu_ekonomicheskikh_zadach_zadanie (дата обращения: 02.10.2024)
2. Решение экономических задач и задач на оптимизацию-URL:
https://pavlovskobr.edu22.info/images/recomend/reshenie_econ.pdf (дата обращения 02.10.2024)
3. РЕШУ ЕГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам/ <https://math-ege.sdangia.ru/?redir=1> (дата обращения 02.10.2024)
4. Прокофьев А.А., Корянов А.Г.: ЕГЭ. Математика. 10-11 классы. Социально-экономические задачи. Задание 17, Издательство: Легион, 2022 г.
5. Семенов А.В., Ященко И.В. «КАК ПОЛУЧИТЬ МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ НА ЕГЭ МАТЕМАТИКА»-М., Интеллект -центр , 2015г.
6. Шихова, Н.А. Задачи с экономическим содержанием: учебное пособие – Москва: ИЛЕКСА, 2022.