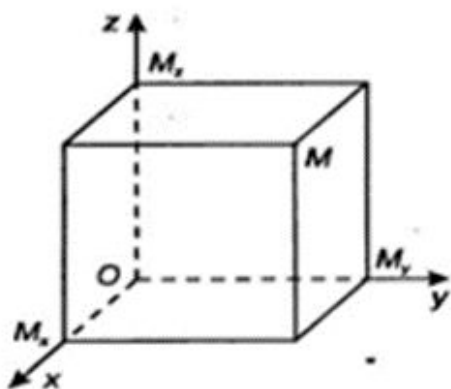


Метод координат

Система координат — это способ определять положение точки или тела с помощью чисел.

Координаты — величины, определяющие положение точки на плоскости и в пространстве. На плоскости положение точки чаще всего определяется расстояниями от двух прямых (координатных осей), пересекающихся в одной точке (начале координат) под прямым углом.

В пространстве по системе Декарта положение точки определяется расстояниями от трех плоскостей координат, пересекающихся в одной точке под прямыми углами друг к другу, где начало координат находится в центре сферы.



Прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием масштаба (отрезка для измерения длин) и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных осей. Координаты произвольной точки в пространстве $M(x, y, z)$, где x — абсцисса, y — ордината, z — аппликата.

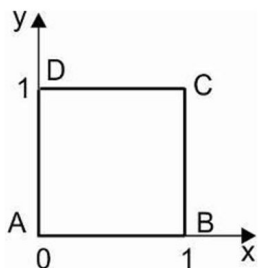
Введение трехмерной системы координат в объемных фигурах:

выбрать определенную точку (начало координат) в фигуре



расположить оси перпендикулярно друг другу

Применение метода координат при решении задач



получаем прямоугольную систему координат, изображая оси x и y на плоскости



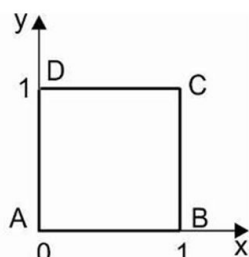
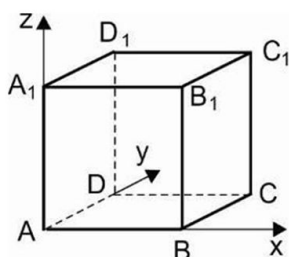
вычисление координат необходимых векторов

ищем координаты необходимых точек

решаем задачу, используя формулы метода координат

Введение трехмерной системы координат в различных фигурах

Куб:



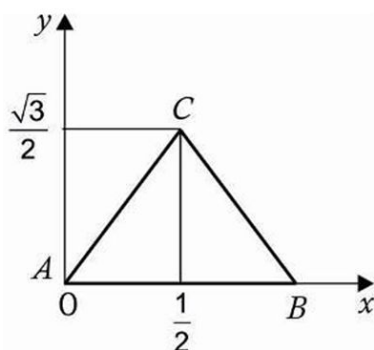
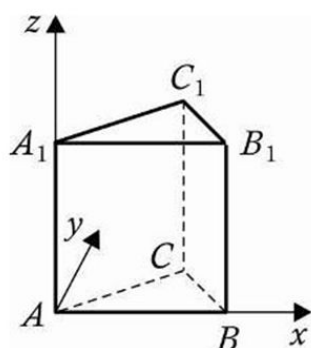
начало координат - в точке A

ось X направим по ребру AB, Y — по ребру AD, а ось Z по ребру AA1

чаще всего ребро куба не указано, поэтому принимаем его за единичный отрезок

получаем следующие координаты точек: A (0;0;0), A1 (0;0;1), B (1;0;0), B1 (1;0;1), D (0;1;0), D1 (0;1;1), C (1;1;0), C1 (1;1;1)

Правильная треугольная призма:



начало координат - в точке A

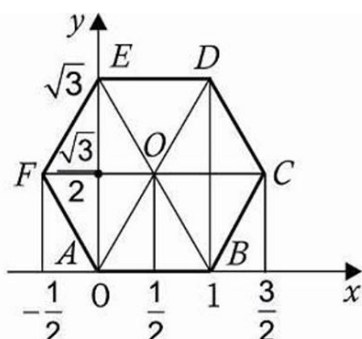
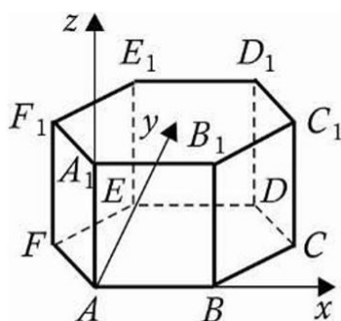
ось X направляем по ребру AB, Z - по ребру AA1, а Y - так, чтобы плоскость OXY совпадала с плоскостью основания ABC и была перпендикулярно оси X

сторону призмы принимаем за единичный отрезок, если иное условие не указано в задаче

получаем следующие координаты точек: A (0;0;0), A1 (0;0;1), B (1;0;0), B1 (1;0;1), C (1/2; sqrt(3)/2; 0), C1 (1/2; sqrt(3)/2; 1)

При введении прямоугольной системы координат выбор начала координат стоит за учеником. Удобнее вводить таким образом, чтобы было больше нулей в координатах и чтобы было удобнее рассчитывать оставшиеся координаты.

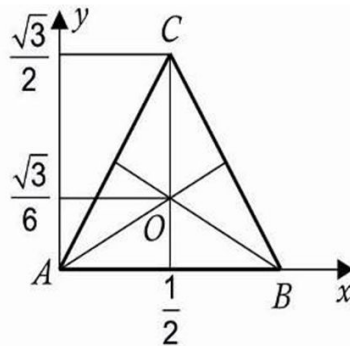
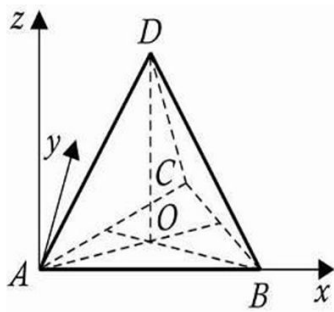
Правильная шестиугольная призма, все ребра которой по 1:



начало координат и направление осей аналогично прошлым фигурам

координаты вершин: A (0; 0; 0), A1 (0; 0; 1), B (1; 0; 0), B1 (1; 0; 1), C (3/2; sqrt(3)/2; 0), C1 (3/2; sqrt(3)/2; 1), D (1; sqrt(3); 0), D1 (1; sqrt(3); 1), E (0; sqrt(3); 0), E1 (0; sqrt(3); 1), F (-1/2; sqrt(3)/2; 0), F (-1/2; sqrt(3)/2; 1)

Правильная треугольная пирамида, все ребра которой по 1:

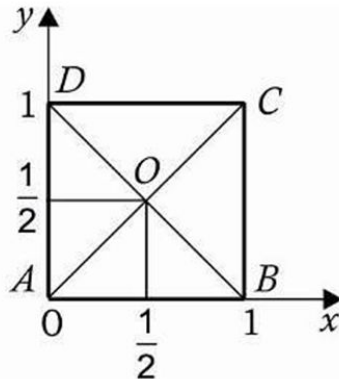
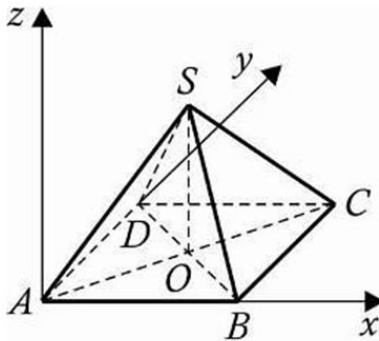


начало координат и направление осей аналогично прошлым фигурам

координаты вершин:

$A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(0.5; \sqrt{3}/2; 0)$,
 $D(0.5; \sqrt{3}/6; \sqrt{2}/\sqrt{3})$

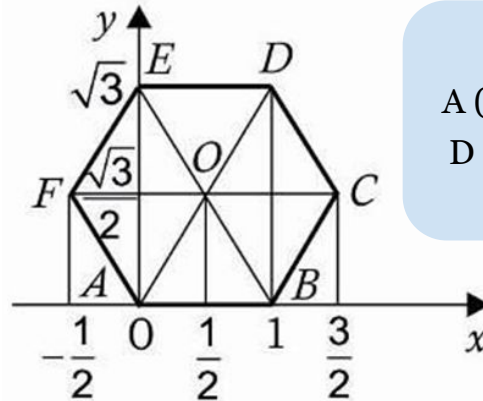
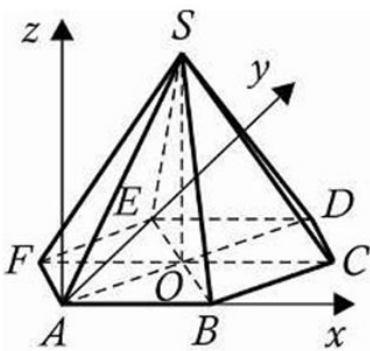
Правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой по 1:



координаты вершин:

$A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $S(1/2; 1/2; \sqrt{2}/2)$

Правильная шестиугольная пирамида, все ребра которой по 2, а стороны основания по 1:



координаты вершин:

$A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(3/2; \sqrt{3}/2; 0)$,
 $D(1; \sqrt{3}; 0)$, $E(0; \sqrt{3}; 0)$, $F(-1/2; \sqrt{3}/2; 0)$, $S(1/2; \sqrt{3}/2; \sqrt{5})$

Использование формул метода координат

1. Нахождение угла между плоскостями

необходимо найти уравнения двух данных плоскостей

плоскость ABC: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$.
Выбираем точку, в координатах которой больше всего нулей. Допустим, это точка A. **Составляем таблицу (матрицу)**, в которой будем вычитать координаты точки A

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

после составления таблицы следует перемножение полученных значений следующим образом:

$$(x - x_1) * (y_2 - y_1) * (z_3 - z_1) + (x_3 - x_1) * (y - y_1) * (z_2 - z_1) + (x_2 - x_1) * (y_3 - y_1) * (z - z_1) - (x_3 - x_1) * (y_2 - y_1) * (z - z_1) - (x_2 - x_1) * (y - y_1) * (z_3 - z_1) - (x - x_1) * (y_3 - y_1) * (z_2 - z_1) = 0$$

после перемножения получается следующее уравнение:
 $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ – это и есть уравнение одной из плоскостей

аналогично находим
уравнение второй плоскости

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

координаты вектора нормали ко
второй плоскости: $(a_2; b_2; c_2)$

координаты вектора нормали (произвольный
вектор, перпендикулярный данной плоскости) –
коэффициенты перед x, y и z , то есть $(a_1; b_1; c_1)$

косинус угла между плоскостями
вычисляется по следующей формуле:

$$\cos \alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

в ответ записываем либо сам $\cos$,
либо $\arccos$ данного угла

2. Нахождение расстояния от точки до плоскости

необходимо найти уравнение плоскости;
ищем по тому алгоритму, который
подробно расписан в пункте 1

уравнение плоскости: $ax + by + cz + d = 0$
координаты вектора нормали: $(a; b; c)$

расстояние от точки до плоскости
вычисляется по следующей
формуле:

$$(M; \alpha) \rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

также понадобятся координаты точки.
Допустим, что это точка M .
Её координаты – $(x_0; y_0; z_0)$

вместо x, y и z в уравнении плоскости
подставляем координаты данной
точки, то есть x_0, y_0 и z_0

3. Нахождение угла между прямыми

необходимо найти координаты
первого вектора (прямой)

пусть вектор (прямая) AB имеет начало в точке
 $A(x_0; y_0; z_0)$, а конец в точке $B(x; y; z)$. Тогда
координаты вектора AB ($x - x_0 = x_1; y - y_0 = y_1; z - z_0 = z_1$)

аналогично находим координаты
второго вектора (прямой)

координаты вектора
 $CD(x_2; y_2; z_2)$

далее необходимо найти длину вектора
 AB (вектор a) и CD (вектор b)

$$|AB| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$
$$|CD| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

угол между данными прямыми
вычисляется по формуле:

$$\cos(\hat{a}; \hat{b}) = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

4. Нахождение угла между прямой и плоскостью:

составляем уравнение плоскости по алгоритму из пункта 1: $ax+by+cz+d=0$

также понадобятся координаты точки.
Допустим, что это точка А.
Её координаты – $(x; y; z)$

угол между прямой и плоскостью
вычисляется по следующей
формуле:

$$\sin \alpha = \frac{|ax + by + cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

в знаменателе перемножение
длин вектора нормали и
вектора прямой

5. Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми (пример задачи):

отмечаем точки на двух прямых ->
соединяем -> получается
перпендикуляр к обеим прямым -
это и есть искомое S

заменяем координаты точек N и
M переменными k и t
соответственно: N $(0; t; t)$ и M $(k;$
 $0; 1-k)$

находим координаты вектора MN:
 $(-k; t; t-1+k)$; также понадобятся
координаты векторов BC₁ и AB₁
→ $(0; 1; 1)$ и $(-1; 0; 1)$
соответственно

применяя формулу для
нахождения длины вектора,
находим искомое S (т.е. ищем
длину вектора MN)

$$|MN| = \sqrt{3}/3$$

$$\begin{aligned} AM/MB_1 &= L \\ BN/NC_1 &= Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x; y; z) & & B(0; 0; 0) \\ A(1; 0; 0) & & C_1(0; 1; 1) \\ B_1(0; 0; 1) & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(0; Y/(Y+1); Y/(Y+1)) \\ M(1/(1+L); 0; L/(1+L)) \end{aligned}$$

перемножаем вектора MN и BC₁:
 $2t+k-1=0$
перемножаем вектора MN и AB₁:
 $2k+t-1=0$

решаем систему из двух
уравнений и находим значения k
и t: $k=t=1/3$

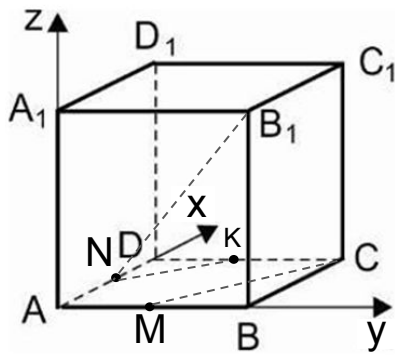
получаем, что координаты
вектора MN равны $(-1/3; 1/3; -1/3)$

Примеры решения задач методом координат

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N являются серединами ребер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

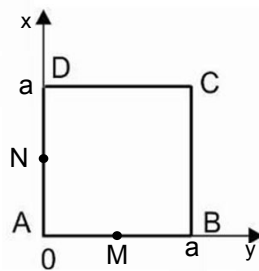
б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1N = 3\sqrt{5}$.



а) 1. Пусть $AB=a$ (сторона куба)

2. Введем трехмерную систему координат в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ так, что: точка A - начало координат, ось ox направлена по прямой AD , ось oy по AB , ось oz по AA_1 .

3. Изобразим прямоугольную систему координат:



4. Координаты необходимых точек:

$B_1(0; a; a)$ $C(a; a; 0)$

$N(a/2; 0; 0)$ $M(0; a/2; 0)$

5. Координаты векторов B_1N и MC :

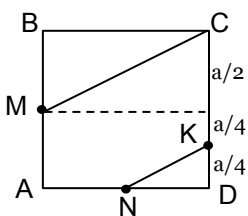
$B_1N \{a/2-0; 0-a; 0-a\} \mid B_1N \{a/2; -a; -a\}$

$MC \{0-(-a); a/2-a; 0\} \mid MC \{a; a/2; 0\}$

6. Найдем скалярное произведение векторов: $B_1N \cdot CM = a \cdot a/2 + (-a) \cdot a/2 + 0 \cdot (-a) = a^2/2 - a^2/2 + 0 = 0 \Rightarrow B_1N \perp CM$ ■

б) 1. $B_1N = 3\sqrt{5}$, но длина вектора B_1N :
 $|B_1N| = \sqrt{a^2/4 + a^2 + a^2} = \sqrt{9a^2/4} = 3a/2 \Rightarrow 3a/2 = 3\sqrt{5}; a = 2\sqrt{5}$

2. Построим $NK \parallel MC, K \in DC$; Искомая плоскость (B_1NK) , так как $B_1N \subset (B_1NK)$



3. Подставляем значение a (из пункта б, шаг 1) в координаты точек B_1, N и C (из пункта а, шаг 4) $\Rightarrow B_1(0; 2\sqrt{5}; 2\sqrt{5}); N(\sqrt{5}; 0; 0); C(2\sqrt{5}; 2\sqrt{5}; 0)$

4. $MC \parallel NK$, лежащая в $(B_1NK) \Rightarrow MC \parallel (B_1NK)$ (по признаку параллельности прямой и плоскости)

5. Найдем уравнение плоскости (B_1NK) :

$B_1(0; 2\sqrt{5}; 2\sqrt{5}); N(\sqrt{5}; 0; 0); K(2\sqrt{5}; \sqrt{5}/2; 0)$

$$\begin{array}{l} -N \\ B_1-N \\ K-N \end{array} \left| \begin{array}{ccc} x-\sqrt{5} & y & z \\ -\sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5}/2 & 0 \end{array} \right| = \begin{array}{l} 0 \cdot (x-\sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{5} + y \cdot (2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} + z \cdot (\sqrt{5}/2) \cdot (-\sqrt{5}) - \\ -(x-\sqrt{5}) \cdot (2\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5}/2) - y \cdot (-\sqrt{5}) \cdot 0 = 0 + 10y - 2.5z - 5x + \\ + 5\sqrt{5} = 0; x - 2y + 2.5z - \sqrt{5} = 0 \end{array}$$

- уравнение плоскости $(B_1NK) \Rightarrow$
 координаты вектора нормали к плоскости $n(1; -2; 5/2)$

6. Находим расстояние от точки C до плоскости $\alpha = (B_1NK)$:

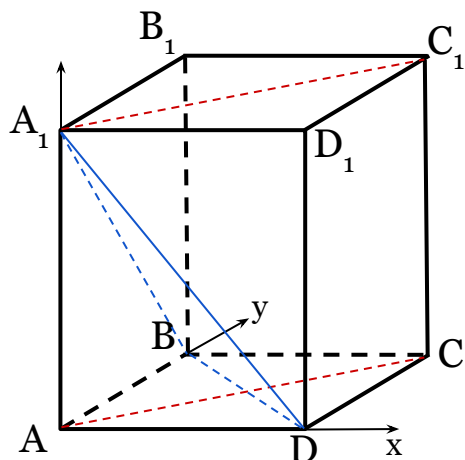
$C(2\sqrt{5}; 2\sqrt{5}; 0)$ (из пункта б, шаг 3)

$n(1; -2; 5/2)$ (из пункта б, шаг 5) $\Rightarrow |n| = \sqrt{1+4+25/4} = \sqrt{45}$

$$\rho(C; \alpha) = \frac{|1 \cdot 2\sqrt{5} - 2 \cdot 2\sqrt{5} + 0 - \sqrt{5}|}{\sqrt{45}} = 2$$

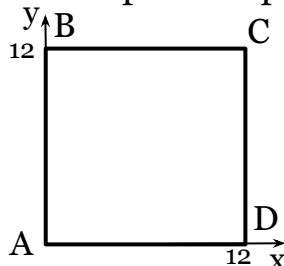
Ответ: б) $\rho(C; \alpha) = 2$

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $BC = 12$.
 а) Докажите, что плоскости $DA_1 B$ и $AA_1 C$ перпендикулярны.
 б) Найдите угол между плоскостью $AA_1 C$ и прямой $A_1 B$.



а) 1. Введем трехмерную систему координат в параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ так, что: точка A - начало координат, ось ox направлена по прямой AB , ось oy по AD , ось oz по AA_1 .

2. Изобразим прямоугольную систему координат:



3. Координаты необходимых точек:

$$\begin{array}{ll} A(0; 0; 0) & C(12; 12; 0) \\ A_1(0; 0; 5) & D(12; 0; 0) \\ B(0; 12; 0) & \end{array}$$

4. Найдем уравнение плоскости $AA_1 C$:

$$\begin{array}{l} -A \\ A_1 - A \\ C - A \end{array} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 5 \\ 12 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot x + y \cdot 5 \cdot 12 + 0 \cdot 12 \cdot z - 0 \cdot 12 \cdot z - 5 \cdot 12 \cdot x - y \cdot 0 \cdot 0 = 60y - 60x = 0$$

$x - y = 0$ - уравнение плоскости $(AA_1 C) \Rightarrow$ координаты вектора нормали к плоскости $n_1(1; -1; 0) \Rightarrow$ длина $|n_1| = \sqrt{2}$

5. Найдем уравнение плоскости $DA_1 B$:

$$\begin{array}{l} -A_1 \\ D - A_1 \\ B - A_1 \end{array} \begin{vmatrix} x & y & z - 5 \\ 12 & 0 & -5 \\ 0 & 12 & -5 \end{vmatrix} = 0 \cdot x \cdot (-5) + y \cdot 0 \cdot (-5) + (z - 5) \cdot 12 \cdot 12 - 0 \cdot 0 \cdot (z - 5) - y \cdot 12 \cdot (-5) - x \cdot 12 \cdot (-5) = 60x + 60y + 144z - 720 = 0$$

$5x + 5y + 12z - 60 = 0$ - уравнение плоскости $(DA_1 B) \Rightarrow$ координаты вектора нормали к плоскости $n_2(5; 5; 12)$

6. Найдем скалярное произведение векторов нормалей n_1 и n_2 : $n_1 \cdot n_2 = 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 5 + 0 \cdot 12 = 0 \Rightarrow n \perp n_2 \Rightarrow (AA_1 C) \perp (DA_1 B)$ ■

б) 1. Координаты вектора $A_1 B$: $A_1 B(0; 12; -5) \Rightarrow$ длина вектора $A_1 B$: $|A_1 B| = 13$

2. Найдем угол между плоскостью $AA_1 C$ и прямой $A_1 B$:

$$\sin a = \frac{|1 \cdot 0 + (-1) \cdot 12 + 0 \cdot (-5)|}{13 \cdot \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{13} \Rightarrow a = \arcsin \frac{6\sqrt{2}}{13}$$

Ответ: б) $a = \arcsin \frac{6\sqrt{2}}{13}$