

государственное общеобразовательное учреждение Ярославской области
«Лицей №86»

**Методы решения заданий с параметрами.
Пособие для старшеклассников по подготовке к ЕГЭ по
профильной математике. Графический метод**

Авторы:

Иванов Максим Артемович, ученик 11
«А» «Инженерного ЯНОС-класса»

ГОУ ЯО «Лицей № 86»

Медведев Тимофей Максимович,
ученик 11 «А» «Инженерного ЯНОС-
класса» ГОУ ЯО «Лицей № 86»

Ярославль 2024

Введение

Дорогой одиннадцатиклассник!

Тебе, как и нам, предстоит сдавать единый государственный экзамен по математике профильного уровня. Мы учимся в «Инженерном ЯНОС-классе», изучаем математику на профильном уровне, очень серьезно готовимся к сдаче ЕГЭ по математике. Наиболее интересными для нас оказались задания с параметрами из второй части экзамена. Чтобы быть успешными при решении таких задач, мы решили детально разобраться в типах заданий с параметрами, предлагаемым на профильном ЕГЭ по математике, а также в методах их решения.

Параметры в ЕГЭ (задание № 18) по праву считаются одной из самых сложных задач второй части и стоят целых 4 первичных балла. Почему так? Мы выделяем несколько причин:

1) **Знания.** Задача требует знания самых разных базовых математических фактов: нужно уметь решать уравнения и неравенства и системы с ними – с модулями, корнями, тригонометрией, логарифмами. Нужно уметь исследовать функции и строить графики: обязательно понимать, что такое Область Допустимых Значений.

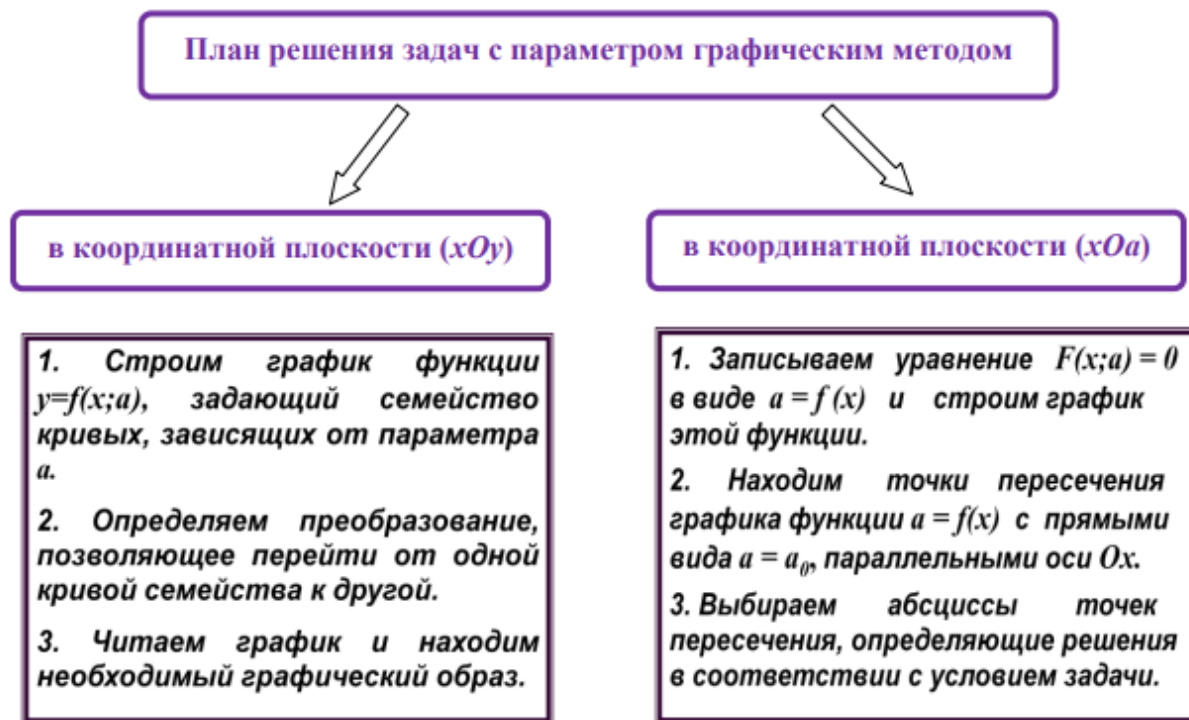
2) **Разнообразие.** Попасться может как будто все, что угодно, и даже если вы ориентируетесь в теме, часто непонятно, как подступить к решению задачи, потому что условие выглядит незнакомым.

3) **Количество тонких моментов.** Если все же вы смогли подступить к решению, и даже подобрались к ответу, это еще не конец. Вам обязательно нужно проверить, не допустили ли вы ошибки в тонне вычислений, и не упустили ли вы «особые случаи». Невнимательность может лишить вас и всех 4 баллов. А учитывая, что задачу вы начали решать минимум через два часа после начала экзамена, вероятность упустить какую-то мелочь сильно возрастает.

Глава 1.

Графический метод решения задач с параметрами. Теоретические сведения.

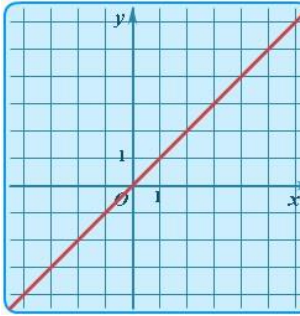
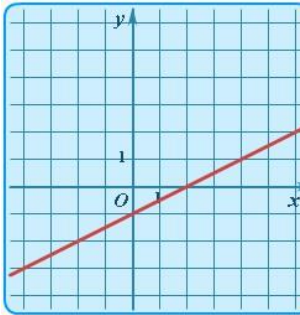
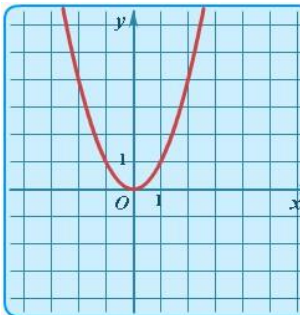
Применение графиков при исследовании задач с параметрами необычайно эффективно. В зависимости от способа их применения выделяют два основных подхода.

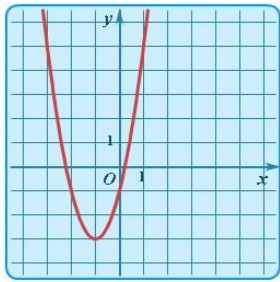
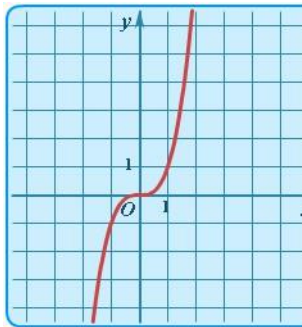
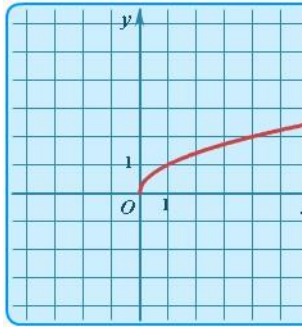
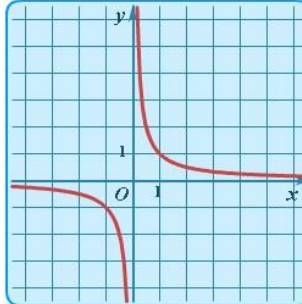


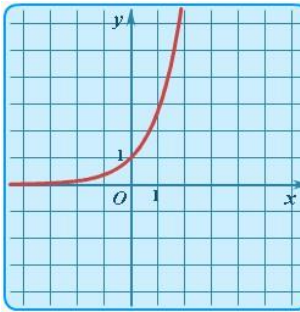
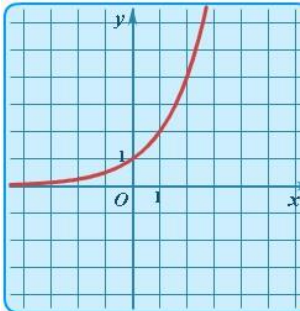
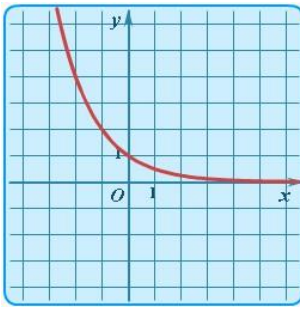
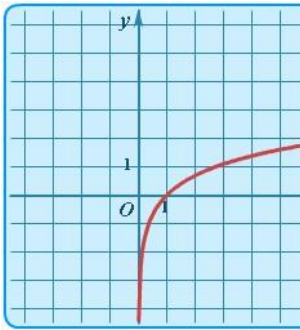
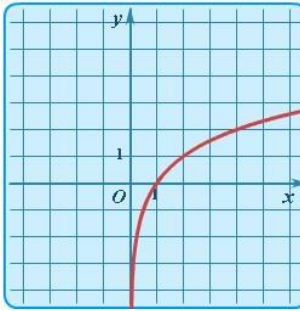
В задачах с параметром часто бывает полезно принять параметр за некоторую функцию от переменной x и графически интерпретировать условие задачи на плоскости xOa , то есть такой координатной плоскости, где ось Oy заменена осью Oa .

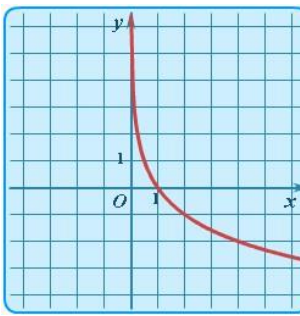
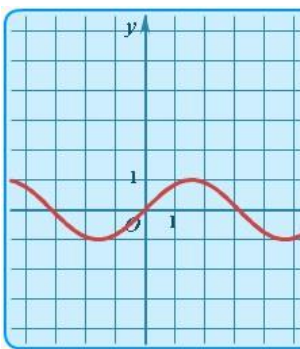
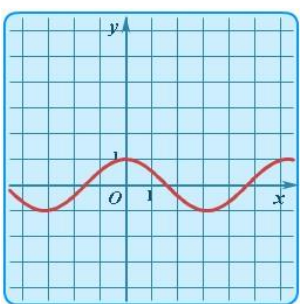
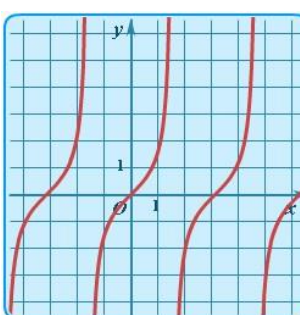
Выделим алгоритм решения задач подобным способом:

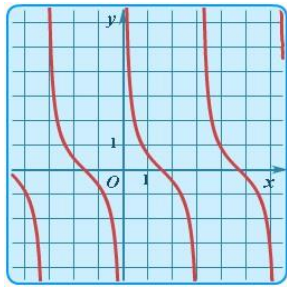
1. Необходимо преобразовать условие задачи к системе или совокупности уравнений или неравенств вида $F(x, a) = 0$ или $F(x, a) \leq 0$ (знак неравенства может быть любой).
Каждое из этих уравнений или неравенств должно быть «похоже» на уравнение некоторой линии. При этом часто бывает полезно выразить параметр через неизвестную.
2. В системе координат xOa строим фигуру, которая задается множеством решений системы (совокупности) уравнений или неравенств.
3. Рассматриваем пересечение этой фигуры со «считывающей» прямой $a = t$, параллельной оси абсцисс, и определяем, при каких значениях параметра выполняются заданные в задаче условия (например, количество решений уравнения).

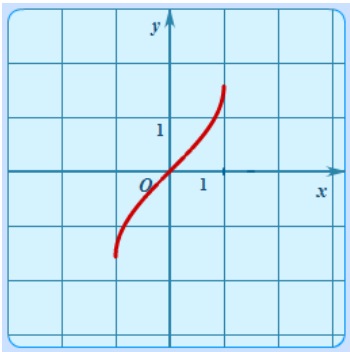
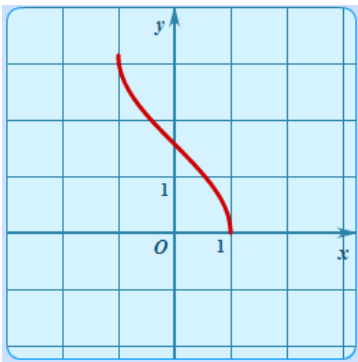
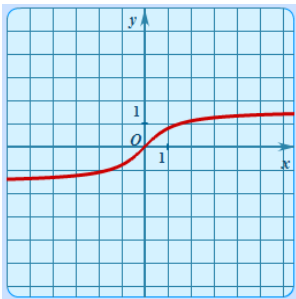
Рассмотрим графики элементарных функций				
Название функции	Формула функции	График функции	Название графика	Комментарий
Линейная	$y = kx$		Прямая	Самый простой случай линейной зависимости - прямая пропорциональность $y = kx$, где $k \neq 0$ - коэффициент пропорциональности. На рисунке пример для $k=1$, то есть. фактически приведенный график иллюстрирует функциональную зависимость, которая задаёт равенство значения функции значению аргумента.
Линейная	$y = kx + b$		Прямая	Общий случай линейной зависимости: коэффициенты k и b - любые действительные числа. Здесь $k = 0.5$, $b = -1$.
Квадратичная	$y = x^2$		Парабола	Простейший случай квадратичной зависимости - симметричная парабола с вершиной в начале координат.

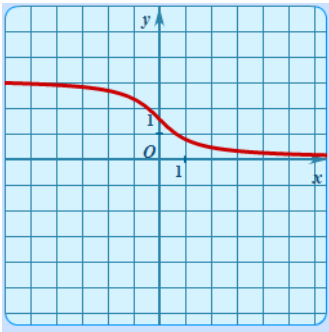
Квадратичная	$y = ax^2 + bx + c$		Парабола	Общий случай квадратичной зависимости: коэффициент a - произвольное действительное число не равное нулю (a принадлежит $\mathbb{R}$, $a \neq 0$), b, c - любые действительные числа.
Степенная	$y = x^3$		Кубическая парабола	Самый простой случай для целой нечетной степени.
Степенная	$y = x^{1/2}$		График функции $y = \sqrt{x}$	Самый простой случай для дробной степени ($x^{1/2} = \sqrt{x}$).
Степенная	$y = k/x$		Гипербола	Самый простой случай для целой отрицательной степени ($1/x = x^{-1}$) - обратно-пропорциональная зависимость. Здесь $k = 1$.

Показательная	$y = e^x$		Экспонента	Экспоненциальной зависимостью называют показательную функцию для основания e - иррационального числа примерно равного 2,7182818284590...
Показательная	$y = a^x$		График показательной функции	Показательная функция определена для $a > 0$ и $a \neq 1$. Графики функции существенно зависят от значения параметра a . Здесь пример для $y = 2^x$ ($a = 2 > 1$).
Показательная	$y = a^x$		График показательной функции	Показательная функция определена для $a > 0$ и $a \neq 1$. Графики функции существенно зависят от значения параметра a . Здесь пример для $y = 0,5^x$ ($a = 1/2 < 1$).
Логарифмическая	$y = \ln x$		График логарифмической функции	График логарифмической функции для основания e (натурального логарифма) иногда называют логарифмикой.
Логарифмическая	$y = \log_a x$		График логарифмической функции	Логарифмы определены для $a > 0$ и $a \neq 1$. Графики функции существенно зависят от значения параметра a . Здесь

				пример для $y = \log_2 x$ ($a = 2 > 1$).
Логарифмическая	$y = \log_a x$		График логарифмической функции	Логарифмы определены для $a > 0$ и $a \neq 1$. Графики функции существенно зависят от значения параметра a. Здесь пример для $y = \log_{0.5} x$ ($a = 1/2 < 1$).
Синус	$y = \sin x$		Синусоида	Тригонометрическая функция синус.
Косинус	$y = \cos x$		Косинусоида	Тригонометрическая функция косинус.
Тангенс	$y = \operatorname{tg} x$		Тангенсоида	Тригонометрическая функция тангенс.

Котангенс	$y = \operatorname{ctg} x$		Котангенсоида	Тригонометрическая функция котангенс.
-----------	----------------------------	---	---------------	---------------------------------------

Обратные тригонометрические функции.				
Название функции	Формула функции	График функции	Название графика	Комментарий
Арксинус	$y = \arcsin x$		График арксинуса	Тригонометрическая функция обратная к $y = \sin x$. Определена на отрезке $[-1; 1]$. Принимает значения от $-\pi/2$ до $\pi/2$.
Арккосинус	$y = \arccos x$		График арккосинуса	Тригонометрическая функция обратная к $y = \cos x$. Определена на отрезке $[-1; 1]$. Принимает значения от 0 до π .
Арктангенс	$y = \operatorname{arctg} x$		График арктангенса	Тригонометрическая функция обратная к $y = \operatorname{tg} x$. Определена на множестве действительных чисел. Принимает значения на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. Имеет асимптоты.

Арккотангенс.	$y = \operatorname{arccotg} x$		График арккотангенс а	Тригонометрическая функция обратная к $y = \operatorname{ctg} x$. Определена на множестве действительных чисел. Принимает значения на интервале $(0; \pi)$. Имеет асимптоты.
---------------	--------------------------------	---	-----------------------	---

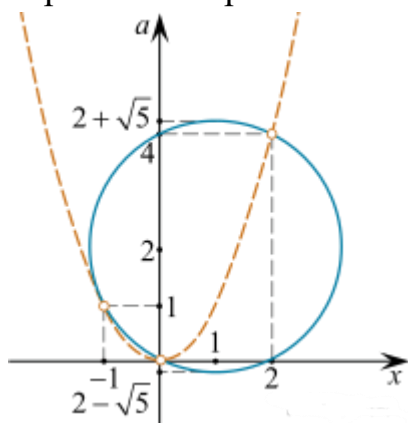
Глава 2.

Графический метод решения задач с параметрами. Практические задания.

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2 - 2x + a^2 - 4a}{x^2 - a} = 0$$

имеет ровно 2 различных решения.



Решение.

В системе координат xOa изобразим окружность, задаваемую уравнением $(x-1)^2 + (a-2)^2 = 5$, все точки которой обращают числитель дроби в нуль, и параболу $a = x^2$, точки которой соответствуют нулям знаменателя.

Подставляя $a = x^2$ в уравнение $(x-1)^2 + (a-2)^2 = 5$ и решая полученное уравнение, найдем точки пересечения окружности и параболы: $(0; 0)$, $(2; 4)$ и $(-1; 1)$ — точка касания. Для найденных точек числитель и знаменатель обращаются в нуль одновременно.

Следовательно, заданное уравнение имеет ровно два решения, когда $2 - \sqrt{5} < a < 2 + \sqrt{5}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq 4$.

Ответ: $a \in (2 - \sqrt{5}; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4) \cup (4; 2 + \sqrt{5})$.

2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

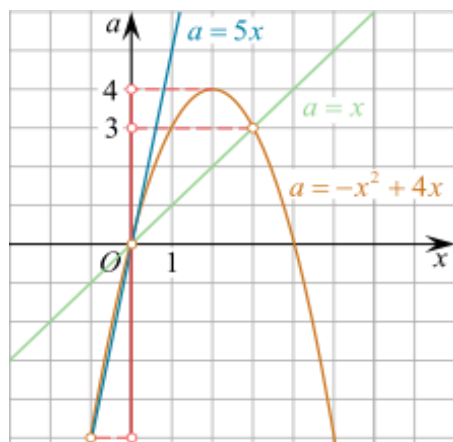
$$\frac{x^2 - 4x + a}{5x^2 - 6ax + a^2} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Заметим, что

$$\frac{x^2 - 4x + a}{5x^2 - 6ax + a^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + a = 0, \\ 5x^2 - 6ax + a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -x^2 + 4x, \\ (5x - a)(x - a) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x^2 + 4x, \\ a \neq x, \\ a \neq 5x. \end{cases}$$



Изобразим решение в системе координат xOa .

Графиком системы, а значит, и графиком исходного уравнения является парабола с выколотыми точками.

Ординаты точек пересечения параболы $a = -x^2 + 4x$ и прямой $a = x$ найдём из уравнения $a = -a^2 + 4a$. Получаем $a = 0$ или $a = 3$.

Ординаты точек пересечения параболы $a = -x^2 + 4x$ и прямой $a = 5x$ найдём из уравнения $a = -\frac{a^2}{25} + \frac{4a}{5}$. Получаем $a = 0$ или $a = -5$.

Ровно два решения исходное уравнение имеет при $a < -5, -5 < a < 0, 0 < a < 3, 3 < a < 4$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 4)$.

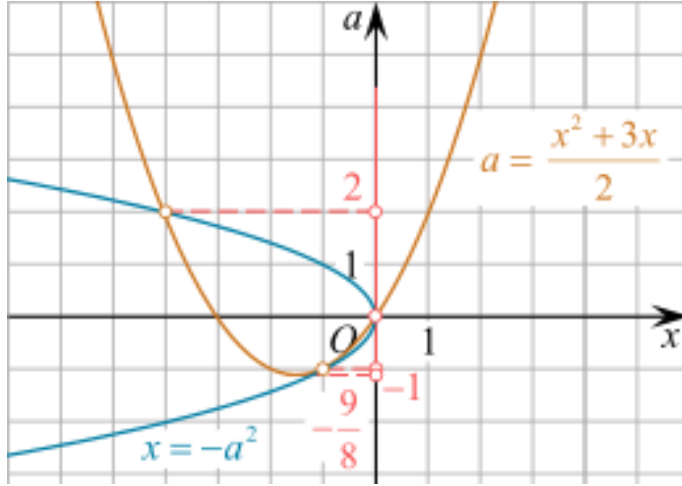
3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{2a - x^2 - 3x}{x + a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение. Заметим, что

$$\frac{2a - x^2 - 3x}{x + a^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - x^2 - 3x = 0, \\ x + a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x^2 + 3x}{2}, \\ x \neq -a^2 \end{cases}$$



Изобразим решение в системе координат xOa . Графиком системы, а значит, и графиком исходного уравнения является парабола с выколотыми точками.

Ординаты точек пересечения парабол $a = \frac{x^2 + 3x}{2}$ и $x = -a^2$ найдём из уравнения $a = \frac{a^4 - 3a^2}{2}$.

$$a^4 - 3a^2 - 2a = 0;$$

$$a(a^3 - 3a - 2) = 0;$$

$$a(a+1)(a^2 - a - 2) = 0;$$

$$a(a+1)^2(a-2) = 0.$$

Получаем $a = -1$ или $a = 0$ или $a = 2$.

Вершина параболы $a = \frac{x^2 + 3x}{2}$ в точке $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{8}\right)$

Ровно два решения исходное уравнение имеет при $-\frac{9}{8} < a < -1, -1 < a < 0, 0 < a < 2, a > 2$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{9}{8}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

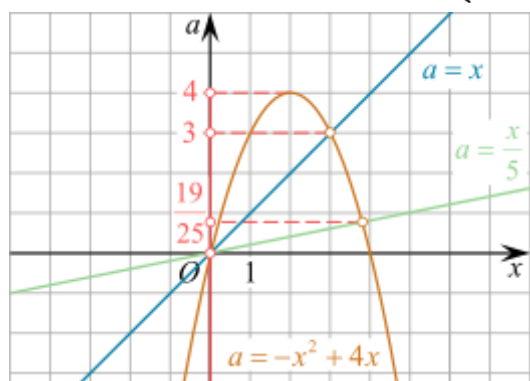
$$\frac{x^2 - 4x + a}{x^2 - 6ax + 5a^2} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Заметим, что

$$\frac{x^2 - 4x + a}{x^2 - 6ax + 5a^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + a = 0, \\ x^2 - 6ax + 5a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -x^2 + 4x, \\ (x - 5a)(x - a) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x^2 + 4x, \\ a \neq x, \\ a \neq \frac{x}{5}. \end{cases}$$



Изобразим решение в системе координат xOa . Графиком системы, а значит, и графиком исходного уравнения является парабола с выколотыми точками.

Ординаты точек пересечения параболы $a = -x^2 + 4x$ и прямой $a = x$ найдём из уравнения $a = -a^2 + 4a$. Получаем $a = 0$ или $a = 3$

Ординаты точек пересечения параболы $a = -x^2 + 4x$ и прямой $a = \frac{x}{5}$ найдём из уравнения $a = -25a^2 + 20a$. Получаем $a = 0$ или $a = \frac{19}{25}$

Ровно два решения исходное уравнение имеет при $a < 0$, $0 < a < \frac{19}{25}$, $\frac{19}{25} < a < 3$, $3 < a < 4$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{19}{25}\right) \cup \left(\frac{19}{25}; 3\right) \cup (3; 4)$.

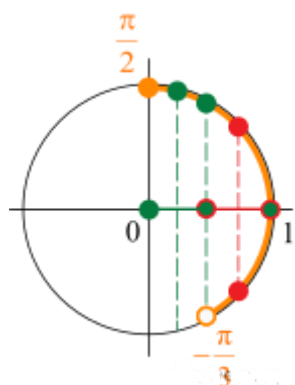
5. Найдите значения параметра a , при которых уравнение

$$\cos^2 x - a^2 \cos x + \left(a^2 - a + \frac{1}{2}\right) \left(a - \frac{1}{2}\right) = 0$$

имеет ровно одно решение на промежутке $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Сделаем замену $t = \cos x$ и найдём корни уравнения

$$t^2 - a^2 t + \left(a^2 - a + \frac{1}{2}\right) \left(a - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (*)$$

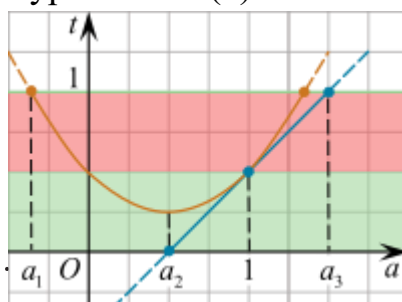


по теореме, обратной теореме Виета:

$$\begin{cases} t = a - \frac{1}{2}, \\ t = a^2 - a + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Заметим, что если $\frac{1}{2} < t < 1$, то каждому такому t соответствует два корня исходного уравнения, если же $t = 1$ или $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, то такому t будет соответствовать один корень исходного уравнения. Прочим t не соответствует ни одного корня.

В системе координат aOt графиком уравнения (*) является объединение прямой



$t = a - \frac{1}{2}$ и параболы

$$t = a^2 - a + \frac{1}{2}.$$

Заметим, что прямая является касательной к параболе в точке $a = 1$ (это следует из того, что уравнение $a^2 - a + \frac{1}{2} = a - \frac{1}{2}$ имеет единственное решение).

Требуется найти такие a , при которых уравнение (*) имеет ровно один корень на $\left[0; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$ и при этом не имеет корней на $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Это выполняется при $a = a_1$, $0 \leq a < a_2$, $a = 1$, $a = a_3$. Найдём значения a_1 , a_2 и a_3 .

Значение a_1 является меньшим корнем уравнения $a^2 - a + \frac{1}{2} = 1$, получаем:
 $a_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$. Значение a_2 является корнем уравнения $a - \frac{1}{2} = 0$, получаем: $a_2 = \frac{1}{2}$.

Значение a_3 является корнем уравнения $a - \frac{1}{2} = 1$, получаем: $a_3 = \frac{3}{2}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно один корень на промежутке $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ при $a = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$, $0 \leq a < \frac{1}{2}$, $a = 1$, $a = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$.

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

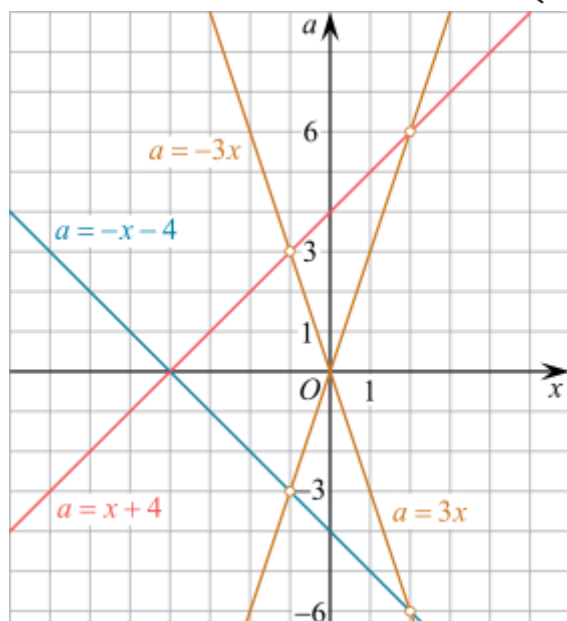
$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение. Преобразуем уравнение, используя формулы сокращённого умножения:

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(3x - a)(3x + a)}{(x + 4)^2 - a^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x - a)(3x + a)}{(x + 4 - a)(x + 4 + a)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3x, \\ a = -3x, \\ a \neq x + 4, \\ a \neq -x - 4. \end{cases}$$



Изобразим решение полученной системы на плоскости xOa . Графиком системы (изображено оранжевым) будет совокупность двух прямых $a = 3x$, $a = -3x$, исключая точки, которые лежат на прямых $a = x + 4$, $a = -x - 4$, а именно: точки $(-1; 3)$, $(-1; -3)$, $(2; 6)$, $(2; -6)$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при $a < -6$; $-6 < a < -3$; $-3 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 6$; и $a > 6$.

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-6; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6; +\infty)$.

7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

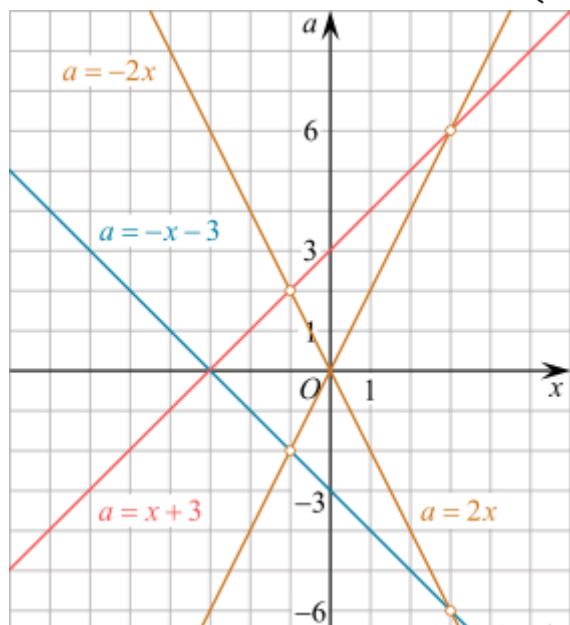
$$\frac{4x^2 - a^2}{x^2 + 6x + 9 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение. Преобразуем уравнение, используя формулы сокращённого умножения:

$$\frac{4x^2 - a^2}{x^2 + 6x + 9 - a^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2x - a)(2x + a)}{(x + 3)^2 - a^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x - a)(2x + a)}{(x + 3 - a)(x + 3 + a)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x, \\ a = -2x, \\ a \neq x + 3, \\ a \neq -x - 3. \end{cases}$$



Изобразим решение полученной системы на плоскости xOa . Графиком системы (изображено синим) будет совокупность двух прямых $a = 2x$, $a = -2x$, исключая точки, которые лежат на прямых $a = x + 3$, $a = -x - 3$, а именно: точки $(-1; 2)$, $(-1; -2)$, $(3; 6)$, $(3; -6)$.

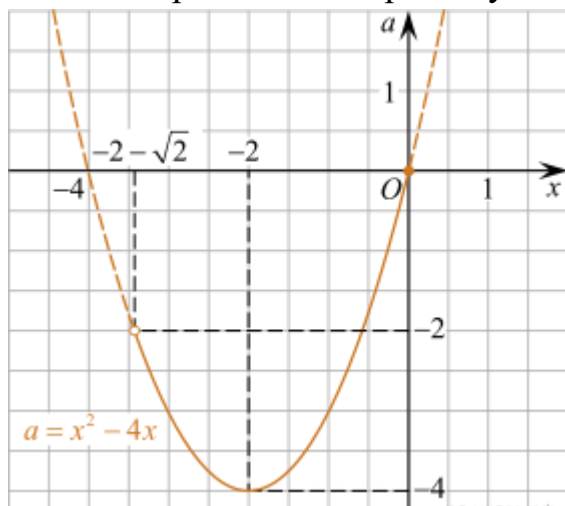
Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при $a < -6$; $-6 < a < -2$; $-2 < a < 0$; $0 < a < 2$; $2 < a < 6$; и $a > 6$.

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-6; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6) \cup (6; +\infty)$.

8. Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{(x^2 - 4x + a)^3}{2} = (a - 4x)(3x^4 + (a - 4x)^2).$$

имеет единственное решение на промежутке $(-2 - \sqrt{2}; 0]$.



Решение.

Пусть $t = a - 4x$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 + t)^3}{2} &= t(3x^4 + t^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^6 + 3x^4t + 3x^2t^2 + t^3 = 6x^4t + 2t^3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^6 - 3x^4t + 3x^2t^2 - t^3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - t)^3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = t. \end{aligned}$$

Таким образом, требуется найти все значения параметра a , при которых уравнение $x^2 = a - 4x$ имеет единственное решение на промежутке $(-2 - \sqrt{2}; 0]$.

Изобразим эскиз графика $a(x) = x^2 + 4x$ — параболу с ветвями вверх и вершиной $(-2; -4)$. Заметим, что $-4 < -2 - \sqrt{2} < -2$, откуда

$$a(-2 - \sqrt{2}) = (-2 - \sqrt{2})^2 + 4(-2 - \sqrt{2}) = -2.$$

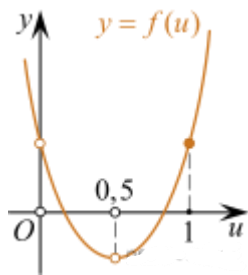
Следовательно, уравнение имеет единственное решение на промежутке $(-2 - \sqrt{2}; 0]$ при $a = -4$ или при $-2 \leq a \leq 0$.

Ответ: $\{-4\} \cup [-2; 0]$.

9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{a \cdot 25^{x^2-1} + 15^{x^2}}{2 \cdot 9^{x^2} - 15^{x^2}} = 1$$

имеет хотя бы одно решение.



Решение.

Положив $a = 25b, \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2} = u$, где $0 < u \leq 1$, и разделив числитель и знаменатель левой части уравнения на 5^{2x^2} , получаем уравнение

$\frac{b+u}{2u^2-u} = 1$. При $u \neq 0$ и $u \neq 0,5$ имеем:

$$\frac{b+u}{2u^2-u} = 1 \Leftrightarrow b+u = 2u^2-u \Leftrightarrow 2u^2-2u-b=0.$$

Рассмотрим функцию $f(u) = 2u^2 - 2u - b$ при $u \neq 0,5$. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса вершины этой параболы равна 0,5, значит, функция будет иметь корни на промежутке $(0; 1]$ тогда и только тогда, когда выполняются два условия $f(0,5) < 0$ и $f(1) \geq 0$ (см. рис.).

Окончательно получаем:

$$\begin{cases} 0,5 - 1 - b < 0, \\ -b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -0,5 < b \leq 0,$$

откуда $-12,5 < a \leq 0$.

Ответ: $-12,5 < a \leq 0$.

10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3 + 2ax^2 - 4a}{ax^2 + x - 3a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение. Дробь равна нулю, если её числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля:

$$\frac{x^3 + 2ax^2 - 4a}{ax^2 + x - 3a} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2ax^2 - 4a = 0, \\ ax^2 + x - 3a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + a(2x^2 - 4) = 0, \\ a(x^2 - 3) + x \neq 0 \end{cases}$$

Числа $x = \pm\sqrt{2}$ и $x = \pm\sqrt{3}$ не являются решениями полученной системы ни при каких значениях параметра, поэтому на выражения в скобках можно разделить без потери равносильности. Получаем:

$$\begin{cases} a = \frac{x^3}{4 - 2x^2}, \\ a \neq \frac{x}{3 - x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x^3}{4 - 2x^2}, \\ \frac{x^3}{4 - 2x^2} \neq \frac{x}{3 - x^2}. \end{cases} \quad (*)$$

Найдем x , при которых выполнено соотношение (*), для этого решим уравнение:

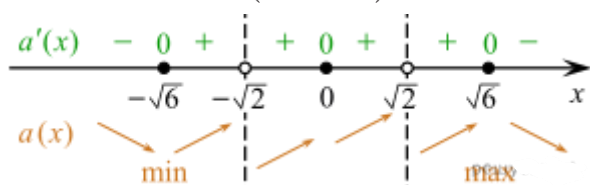
$$\frac{x^3}{4-2x^2} = \frac{x}{3-x^2} \Leftrightarrow \frac{x^5 - 5x^3 + 4x}{(4-2x^2)(3-x^2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x^4 - 5x^2 + 4)}{(4-2x^2)(3-x^2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{(4-2x^2)(3-x^2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = \pm 1, \\ x = \pm 2. \end{cases}$$

Итак, $x \neq 0, \pm 1, \pm 2$.

При найденных x построим эскиз графика функции $a(x) = \frac{x^3}{4-2x^2}$ в системе координат xOa . Найдем производную и определим ее знаки:

$$a'(x) = \frac{3x^2 \cdot (4-2x^2) - x^3 \cdot (-4x)}{(4-2x^2)^2} = \frac{12x^2 - 2x^4}{(4-2x^2)^2} = \frac{2x^2(6-x^2)}{(4-2x^2)^2}.$$



При неограниченном увеличении аргумента x значения функции неограниченно уменьшаются, а при неограниченном уменьшении x значения функции неограниченно возрастают. Прямые $x = \pm\sqrt{2}$ являются вертикальными асимптотами. Вычислим значения функции $a(x)$ в критических точках:

$$a(0) = 0,$$

$$a_{max} = a(\sqrt{6}) = \frac{\sqrt{6}^3}{4-2 \cdot \sqrt{6}^2} = -\frac{3\sqrt{6}}{4},$$

$$a_{min} = a(-\sqrt{6}) = \frac{(-\sqrt{6})^3}{4-2 \cdot (-\sqrt{6})^2} = \frac{3\sqrt{6}}{4}.$$

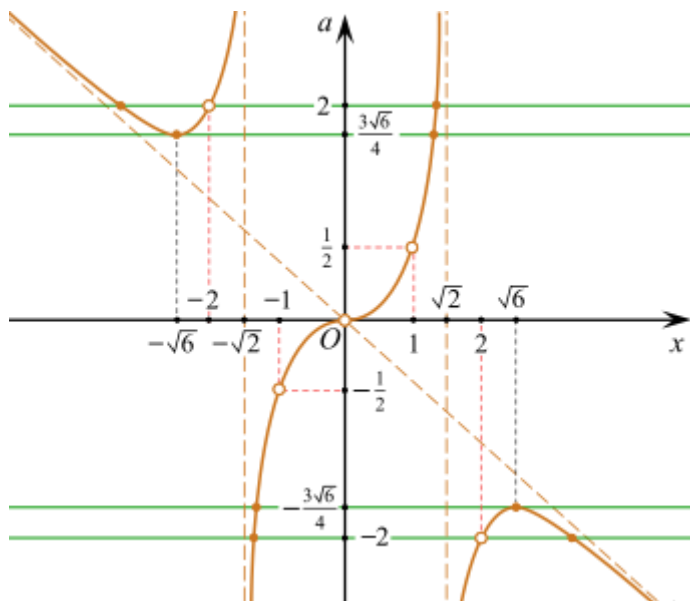
Вычислим значения $a(x)$ в точках $0, \pm 1, \pm 2$ и исключим эти точки на графике:

$$a(0) = 0,$$

$$a(1) = \frac{1^3}{4-2 \cdot 1^2} = \frac{1}{2},$$

$$a(-1) = -\frac{1}{2}, a(2) = \frac{2^3}{4-2 \cdot 2^2} = -2,$$

$$a(-2) = 2.$$



Из эскиза графика находим, что исходное уравнение

— при $a < -2$ имеет три различных корня;

— при $a = -2$ имеет **два** различных корня;

— при $-2 < a < -\frac{3\sqrt{6}}{4}$ имеет три различных корня;

— при $a = -\frac{3\sqrt{6}}{4}$ имеет **два** различных корня;

— при $-\frac{3\sqrt{6}}{4} < a < -\frac{1}{2}$ имеет один корень;

— при $a = -\frac{1}{2}$ не имеет корней;

— при $-\frac{1}{2} < a < 0$ имеет один корень;

— при $a = 0$ не имеет корней;

— при $0 < a < \frac{1}{2}$ имеет один корень;

— при $a = \frac{1}{2}$ не имеет корней;

— при $\frac{1}{2} < a < \frac{3\sqrt{6}}{4}$ имеет один корень;

— при $a = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ имеет **два** различных корня;

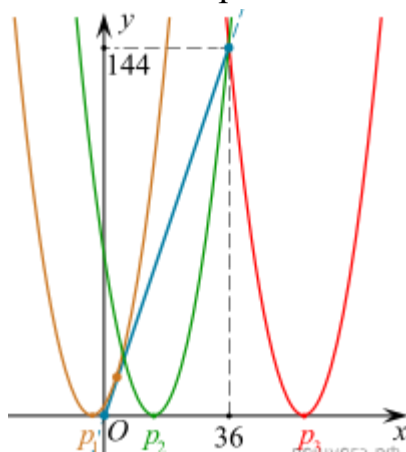
- при $\frac{3\sqrt{6}}{4} < a < 2$ имеет три различных корня;
- при $a = 2$ имеет два различных корня;
- при $a > 2$ имеет три различных корня.

Ответ: $a = \pm 2$, $a = \pm \frac{3\sqrt{6}}{4}$.

11. Найдите все значения параметра p , при каждом из которых уравнение

$$36 \cdot \sin\left(\arcsin \frac{x}{36}\right) = \frac{(x-p)^2}{4}$$

имеет единственный корень.



Решение. Преобразуем уравнение:

$$36 \cdot \sin\left(\arcsin \frac{x}{36}\right) = \frac{(x-p)^2}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{(x-p)^2}{4}, \\ -36 \leq x \leq 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = (x-p)^2, \\ 0 \leq x \leq 36 \end{cases}$$

Построим графики левой и правой части уравнения. График левой части уравнения, с учётом ограничения $0 \leq x \leq 36$ — отрезок прямой $y = 4x$. График правой части $y = (x-p)^2$ — парабола с ветвями вверх и вершиной в точке $(p; 0)$.

На рисунке представлены граничные ситуации: $y = (x-p_1)^2$ — парабола касающаяся прямой $y = 4x$ (выделена оранжевым), $y = (x-p_2)^2$ — парабола, правая ветвь которой проходит через точку $(36; 144)$ (выделена зелёным) и $y = (x-p_3)^2$ — парабола, левая ветвь которой проходит через точку $(36; 144)$ (выделена красным).

Уравнение не имеет корней при $p < p_1$, имеет один корень при $p = p_1$, имеет два корня при $p_1 < p \leq p_2$, имеет один корень при $p_2 < p \leq p_3$ и не имеет корней при $p > p_3$.

Значение p_1 найдём, приравняв дискриминант квадратного уравнения $4x = (x - p_1)^2$ нулю.

$$4x = (x - p_1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2(p_1 + 2)x + p_1^2 = 0, \frac{D}{4} = (p_1 + 2)^2 - p_1^2 = 4p_1 + 4.$$

$$4p_1 + 4 = 0 \Leftrightarrow p_1 = -1.$$

Значения p_2 и p_3 найдём, подставив в $y = (x - p)^2$ координаты точки $(36; 144)$.

$$144 = (36 - p)^2 \Leftrightarrow \pm 12 = 36 - p \Leftrightarrow \begin{cases} p_2 = 24, \\ p_3 = 48. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение имеет единственный корень при $p = -1$ или $24 < p \leq 48$.

Ответ: $\{-1\} \cup (24; 48]$.

12. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x - 5 - 2ax + 6a - a^2 = 0$$

имеет не более трех решений.

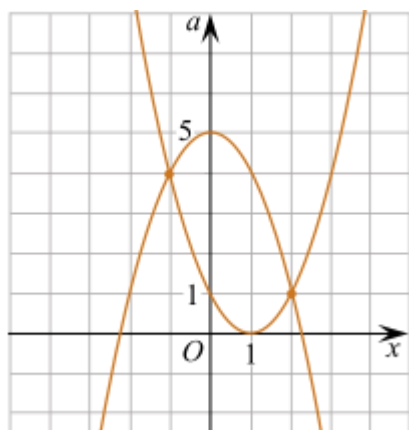
Решение. Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x - 5 - 2ax + 6a - a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2(5 - a)x - (a - 1)(a - 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - (a - 1))(x^2 + (a - 5)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 - a = 0, \\ x^2 - 5 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = (x - 1)^2, \\ a = 5 - x^2. \end{cases}$$

В системе координат xOa построим графики двух квадратичных функций, которые пересекаются в точках $(-1; 4)$ и $(2; 1)$. По графику получаем, что уравнение имеет



- при $a < 0$ два корня;
- при $a = 0$ три корня;
- при $0 < a < 1$ четыре корня;
- при $a = 1$ три корня;
- при $1 < a < 4$ четыре корня;
- при $a = 4$ три корня;
- при $4 < a < 5$ четыре корня;
- при $a = 5$ три корня;
- при $a > 5$ два корня.

Таким образом, уравнение имеет не более трёх корней при $a \leq 0$, $a = 1$, $a = 4$ и $a \geq 5$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{1; 4\} \cup [5; +\infty)$.

13. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{a^2 - 3x^2 + 2ax + 2a + 8x + 1}{(\sqrt{2x+1})^2} = \log_p p,$$

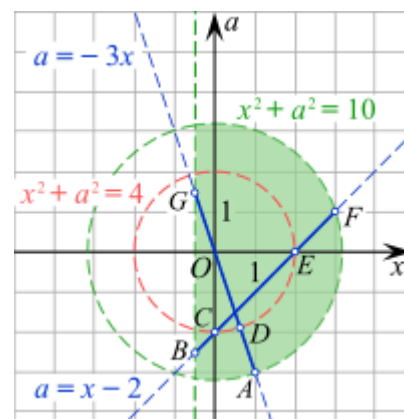
где $p = \frac{5}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{a^2}{6}$, имеет ровно один корень.

Решение. При положительных и отличных от единицы значениях p правая часть уравнения равна 1. Поэтому уравнение равносильно системам:

$$\begin{cases} \frac{a^2 - 3x^2 + 2ax + 2a + 8x + 1}{(\sqrt{2x+1})^2} = 1, \\ \frac{5}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{a^2}{6} > 0, \\ \frac{5}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{a^2}{6} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3x^2 + 2ax + 2a + 8x + 1 = 2x + 1, \\ 2x + 1 > 0, \\ x^2 + a^2 < 10, \\ x^2 + a^2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2(a+3)x - a^2 - 2a = 0, \\ 2x + 1 > 0, \\ x^2 + a^2 < 10, \\ x^2 + a^2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = x - 2, \\ a = -3x, \end{cases} \\ x > -0,5, \\ x^2 + a^2 < 10, \\ x^2 + a^2 \neq 4. \end{cases}$$

Изобразим решение полученной системы в осях xOa . Решением являются отрезки прямых $a = x - 2$ и $a = -3x$ (выделены синим), расположенные внутри окружности $x^2 + a^2 = 10$, справа от прямой $x = -0,5$ (выделено зелёным), за исключением точек, принадлежащих окружности $x^2 + a^2 = 4$ (выделено красным).



Найдём координаты точек A, B, C, D, E, F, G и координату точки пересечения прямых $a = x - 2$ и $a = -3x$.

Получаем: $A(1; -3), B(-0,5; -2,5), C(0; -2), D(\sqrt{0,4}; -3\sqrt{0,4}), E(2; 0), F(3; 1), G(-0,5; 1,5)$. Прямые $a = x - 2$ и $a = -3x$ пересекаются в точке с координатами $(0,5; -1,5)$.

По графику определяем, что система имеет единственный корень при $-3 < a \leq -2,5$, $a = -2$, $a = -3\sqrt{0,4}$, $a = -1,5$, $a = 0$ и $1 \leq a < 1,5$.

(Заметим дополнительно, что при $a \leq -3$ и при $a \geq 1,5$ система решений не имеет, в остальных случаях система имеет два решения.)

Ответ: $(-3; -2,5] \cup \{-2; -3\sqrt{0,4}; -1,5; 0\} \cup [1; 1,5)$.

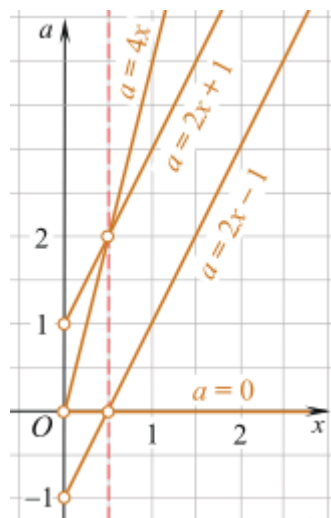
14. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_{2x}^2(4ax - a^2 + 1) - 2\log_{2x}(4ax - a^2 + 1) = 0$ имеет более двух корней.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\log_{2x}^2(4ax - a^2 + 1) - 2\log_{2x}(4ax - a^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{2x}(4ax - a^2 + 1) = 0, \\ \log_{2x}(4ax - a^2 + 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4ax - a^2 + 1 = 1, \\ 4ax - a^2 + 1 = 4x^2, \\ 2x > 0, \\ 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4ax = a^2, \\ (2x - a)^2 = 1, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = 4x, \\ a = 2x - 1, \\ a = 2x + 1, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$



Изобразим решение полученной системы в системе координат xOa .

При $a \leq 1$ система не имеет решений;

— при $-1 < a < 0$ система имеет одно решение $x = \frac{a+1}{2}$;

— при $a = 0$ система имеет бесконечно много решений

$0 < x < \frac{1}{2}$ или $x > \frac{1}{2}$;

— при $0 < a \leq 1$ система имеет два решения $x = \frac{a+1}{2}$ или $x = \frac{a}{4}$;

— при $1 < a < 2$ система имеет три решения $x = \frac{a+1}{2}$,

$x = \frac{a-1}{2}$, или $x = \frac{a}{4}$;

— при $a = 2$ система имеет одно решение $x = \frac{a+1}{2}$;

— при $a > 2$ система имеет три решения $x = \frac{a+1}{2}$, $x = \frac{a-1}{2}$, или $x = \frac{a}{4}$.

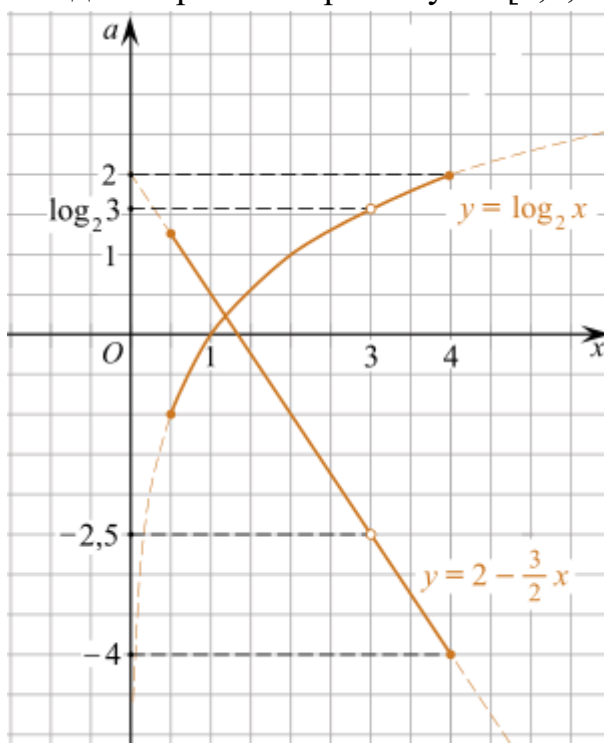
Таким образом, исходное уравнение имеет более двух решений при $a = 0, 1 < a < 2$ или $a > 2$.

Ответ: $\{0\} \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

15. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$\frac{2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2)}{x^2 - 3x} = 0$$

имеет хотя бы один корень на промежутке $[0,5; 4]$.



Решение.

Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель при этом отличен от нуля. Чтобы найти нули числителя, получим квадратное относительно параметра уравнение и воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета:

$$\frac{2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2)}{x^2 - 3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + 3ax + (4 - 3x) \cdot \log_2 x - 2a(\log_2 x + 2) = 0, \\ x \neq 0, x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a \left(2 - \frac{3}{2}x + \log_2 x \right) + \left(2 - \frac{3}{2}x \right) \cdot \log_2 x = 0, \\ x \neq 0, x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = \log_2 x, \\ a = 2 - \frac{3}{2}x, \end{cases} \\ x \neq 3, \\ x > 0. \end{cases}$$

Построим график полученной системы на отрезке $[0,5; 4]$ в системе координат xOa .

По графику определяем, что исходное уравнение имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0,5; 4]$ при $-4 \leq a < -2,5$, $-2,5 < a < \log_2 3$ или при $\log_2 3 < a \leq 2$.

Ответ: $[-4; -2,5) \cup (-2,5; \log_2 3) \cup (\log_2 3; 2]$.

16. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(x - a)^2 \cdot (a(x - a)^2 - a - 1) = -1$

имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

Решение. Пусть $(x - a)^2 = t$, тогда:

$$t \cdot (at - a - 1) = -1 \Leftrightarrow at^2 - (a + 1)t + 1 = 0.$$

При $a = 0$ получаем $t = 1$, откуда находим:

$$(x - 0)^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Положительных и отрицательных корней поровну, условие задачи не выполнено.

При $a \neq 0$ имеем:

$$at^2 - (a + 1)t + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - \left(1 + \frac{1}{a}\right)t + 1 \cdot \frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = \frac{1}{a}. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной, получим совокупность уравнений:

$$(x - a)^2 = 1$$

или

$$(x - a)^2 = \frac{1}{a}.$$

При $a < 0$ второе уравнение совокупности корней не имеет, а у первого уравнения два корня, среди которых не менее одного отрицательного (см. рис. 1). Значит, при $a < 0$ условие задачи не выполнено.

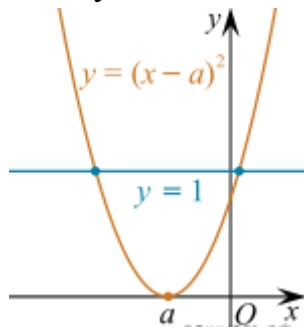


Рис. 1: $a < 0$

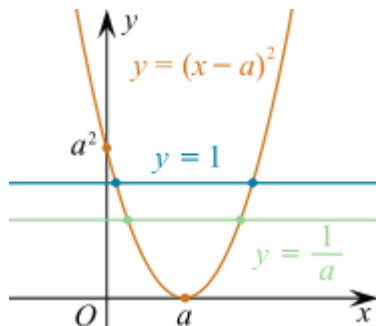


Рис. 2: $a > 0$

При $a > 0$ каждое уравнение совокупности имеет два корня, среди которых не менее одного положительного (см. рис. 2). Значит, для выполнения условия задачи необходимо и достаточно чтобы хотя бы одно из двух уравнений не имело отрицательного корня, то есть выполнялась совокупность условий

$$\begin{cases} a^2 \geq 1, \\ a^2 \geq \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow_{a>0} \begin{cases} a^2 \geq 1, \\ a^3 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow_{a>0} a \geq 1.$$

Таким образом, условие задачи выполняется при $a \geq 1$.

Ответ: $[1, +\infty)$.

17. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \cdot \log_3(a - 2x) = -\log_3(a - 2x)$$

имеет единственный корень на отрезке $[-2; 0]$.

Решение. Найдём все значения параметра a , при которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \cdot \log_3(a - 2x) = -\log_3(a - 2x), \\ -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

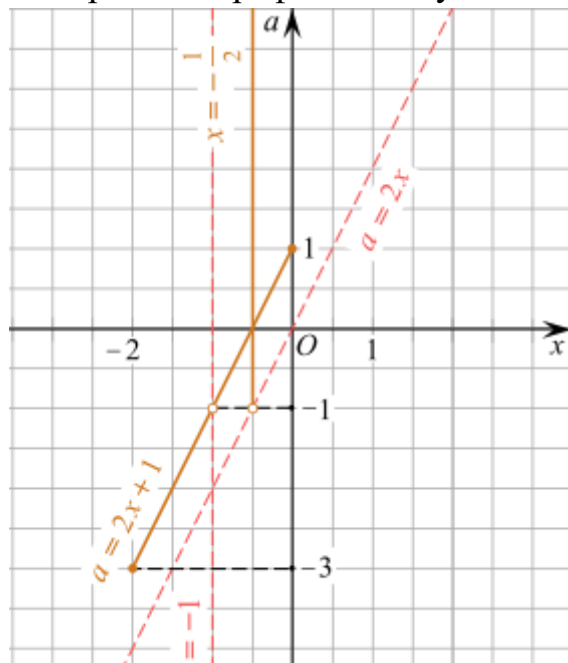
Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \cdot \log_3(a - 2x) = -\log_3(a - 2x), \\ -2 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \log_3(a - 2x) = 0, \\ \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = -1, \\ -2 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a - 2x = 1, \\ \frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \\ a - 2x > 0, \\ \frac{\pi x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ -2 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 2x + 1, \\ x = -\frac{1}{2} + 2k, \\ a > 2x, \\ x \neq 1 + 2n, \\ -2 \leq x \leq 0, \end{cases} k, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 2x + 1, \\ x = -\frac{1}{2}, \\ a > 2x, \\ x \neq -1, \\ -2 \leq x \leq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Построим график полученной системы в системе координат xOa .



Анализируя график, приходим к выводу, что система имеет единственное решение при $-3 \leq a < -1$, $a = 0$ или при $a > 1$.

Ответ: $[-3; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

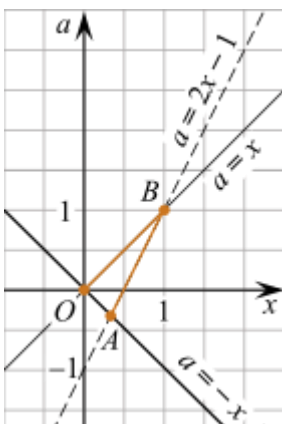
$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{3x^2 - (3a + 1)x + a}$$

имеет один корень на отрезке $[0; 1]$.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{3x^2 - (3a + 1)x + a} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - a^2 = 3x^2 - (3a + 1)x + a, \\ x^2 - a^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - (3a + 1)x + a(a + 1) = 0, \\ (x + a)(x - a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, \\ x = \frac{a + 1}{2}, \\ (x + a)(x - a) \geq 0. \end{cases}$$



В системе координат xOa графиками уравнений являются прямые $a = x$ и $a = 2x - 1$. При неотрицательных значениях x неравенству $(x + a)(x - a) \geq 0$ удовлетворяют точки лежащие одновременно не ниже прямой $a = -x$ и не выше прямой $a = x$. Решение полученной системы на отрезке $[0; 1]$ выделено оранжевым цветом. Абсциссы точек пересечения прямых найдём из уравнений:

$$-x = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, x = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Значит, } A\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right), B(1; 1).$$

Анализируя график, получаем, что исходное уравнение на отрезке $[0; 1]$:

- при $a < -\frac{1}{3}$ не имеет корней;
- при $-\frac{1}{3} \leq a < 0$ имеет **один корень**;
- при $0 \leq a < 1$ имеет два корня;
- при $a = 1$ имеет **один корень**;
- при $a > 1$ не имеет корней.

Таким образом, исходное уравнение на отрезке $[0; 1]$ имеет один корень при

$$-\frac{1}{3} \leq a < 0 \quad \text{или при } a = 1.$$

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \{1\}.$

Список литературы

1. Авт.-сост.: О.М. Борискова, В.А. Захарова, М.Е. Квиткова и др.; Под научной ред. В.И. Семенова; Под общей ред.: Т.П. Трушкиной. Предпрофильная подготовка. Математика: Учебно методическое пособие.— Кемерово: Изд-во КРИПКиПРО, 2004. — 129 с
2. Горнштейн, П. И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – К. : РИА «Тест», 1992.
3. Елисеев Ю. Решение задач с параметрами, Пермь, 2012г, 12с.
4. Образовательный портал <https://ege.sdamgia.ru/?r>
5. Открытый банк заданий ЕГЭ | Математика. Профильный уровень <https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B>
6. Прокофьев А.А. Рекомендации по подготовке к выполнению задания №17 (задачи с параметром) ЕГЭ профильного уровня, Зеленоград, 2022, 75с.
7. Сканава М.И. Полный сборник задач для поступающих в ВУЗы. Группа повышенной сложности / Под редакцией М.И. Сканава. – М.: ООО «Издательство «Мир и образование»: Мн.: ООО «Харвест», 2006. – 624 с.: ил.
8. Ткачук В.В. Математика – абитуриенту. Том 1 [Текст] / В. В. Ткачук. - М.: МЦНМО ТЕИС, 1996.-415 с.